| 授業コード：73006-002 | 参照物：無し | 回収：解答用紙のみ |
|---|---|---|

# 微積分学Ⅱ2中間試験 '14.11/11

1．微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=-tx$ の解をすべて求めよ．（10点）

2．微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=x+e^{2t}$ の一般解を求めよ．（10点）

3．微分方程式 $x''(t)-4x'(t)-5x(t)=0$ の一般解を求めよ．（10点）

4．初期値問題 $x''(t)-2x'(t)+2x(t)=0, x(0)=0, x'(0)=1$ を解け．（10点）

5．放物面 $S: z=f(x,y)=x^2+y^2+xy-x-y$ を考える．

(1) 偏導関数 $f_x, f_y$ を求めよ．（10点）

(2) $S$ 上の点 $(1,1,1)$ における $S$ の接平面の方程式を書け．（5点）

(3) $S$ 上の点 $(1,1,1)$ における $S$ の法線をパラメタ表示せよ．（5点）

6．関数 $f(x,y)$ の点 $(a,b)$ を中心とする $\theta$ 方向の変化を $F_\theta(t)=f(a+t\cos\theta, b+t\sin\theta)$ と書くと，$\theta$ 方向微分は $f'_\theta(a,b)=\dfrac{d}{dt}F_\theta(0)$ である．（$\cos\theta, \sin\theta$ も定数である．）

(1) $f'_\theta(a,b)=f_x(a,b)\cos\theta+f_y(a,b)\sin\theta$ であることを示せ．（10点）

(2) 問5の $f(x,y)$ について，$0\le\theta<2\pi$ の範囲で $f'_\theta(1,1)$ が最大になる $\theta$ を求めよ．（10点）

7．関数 $f(x,y)=\cos(x+y)$ について考える．

(1) 導関数 $f^{(1,0)}, f^{(0,1)}, f^{(2,0)}, f^{(1,1)}, f^{(0,2)}$ を求めよ．（10点）

(2) 2次のマクローリン展開

$$f(x,y)=\frac{f^{(0,0)}}{0!0!}+\frac{f^{(1,0)}}{1!0!}x+\frac{f^{(0,1)}}{0!1!}y+\frac{f^{(2,0)}}{2!}x^2+\frac{f^{(1,1)}}{1!1!}xy+\frac{f^{(0,2)}}{2!}y^2+R_3$$

を計算せよ．剰余項 $R_3$ は具体的に求めなくてもよい．この式で，$f^{(i,j)}$ は $f^{(i,j)}(0,0)$ を略記したものである．（10点）

# 微積分学Ⅱ2中間試験 '14.11/11解答

１．微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=-tx$ の解をすべて求めよ．（10点）

<一般解＞ 変数分離した $\dfrac{dx}{x}=-tdt$ を積分して，

$\log x=\int\dfrac{dx}{x}=-\int t\,dt=-\dfrac{1}{2}t^2+c.\ \therefore x=e^{-t^2/2+c}=e^ce^{-t^2/2}$ （$c$ は積分定数)．

$C=e^c$ と置いて，

$$x=e^{-t^2/2+c}=Ce^{-t^2/2}\quad（C\neq 0 \text{ は任意定数}）．\cdots①$$

＜特殊解＞ 恒等関数 $x(t)=0$ は変数分離で処理できないが解である．

一般解と特殊解を合わせて

$$x=e^{-t^2/2+c}=Ce^{-t^2/2}\quad（C \text{ は任意定数}）．$$

２．微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=x+e^{2t}$ の一般解を求めよ．（10点）

公式により， $x=e^t\left(\int e^{-t}e^{2t}\,dt+C\right)=e^t\left(\int e^t\,dt+C\right)=e^t\left(e^t+C\right)=e^{2t}+Ce^t$ ．

３．微分方程式 $x''(t)-4x'(t)-5x(t)=0$ の一般解を求めよ．（10点）

特性方程式 $\lambda^2-4\lambda-5=(\lambda+1)(\lambda-5)=0$ より，特性解は $\lambda=-1,5$ ．ゆえに，一般解は

$$x(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{5t}\quad（C_1,C_2 \text{ は任意定数})．$$

４．初期値問題 $x''(t)-2x'(t)+2x(t)=0, x(0)=0, x'(0)=1$ を解け．（10点）

特性方程式 $\lambda^2-2\lambda+2=0$ より，特性解は $\lambda=1\pm i$ ．一般解は $x=e^t(a\cos t+b\sin t)$ ．導関数は $x'=e^t(a\cos t+b\sin t)+e^t(-a\sin t+b\cos t)$ である．これらを初期条件に代入して，

$$\begin{cases}x(0)=e^0(a\cos 0+b\sin 0)=a=0,\\ x'(0)=e^0(a\cos 0+b\sin 0)+e^0(-a\sin 0+b\cos 0)=a+b=1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0,\\ b=1\end{cases}$$

ゆえに解は， $x=e^t(0\cos t+1\sin t)=e^t\sin t$ ．

５．放物面 $S:z=f(x,y)=x^2+y^2+xy-x-y$ を考える．

(1) 偏導関数 $f_x,f_y$ を求めよ．（10点）

$$f_x=2x+y-1,\ f_y=2y+x-1．$$

(2) $S$ 上の点 $(1,1,1)$ における $S$ の接平面の方程式を書け．（5点）

$$z=f_x(1,1)(x-1)+f_y(1,1)(y-1)+f(1,1)=2(x-1)+2(y-1)+1=2x+2y-3．$$

(3) $S$ 上の点 $(1,1,1)$ における $S$ の法線をパラメタ表示せよ．（5点）

$$(x,y,z)=(1,1,1)+t(f_x,f_y,-1)=(1,1,1)+t(2,2,-1) \quad (-\infty<t<\infty).$$

６．関数 $f(x,y)$ の点 $(a,b)$ を中心とする $\theta$ 方向の変化を $F_\theta(t)=f(a+t\cos\theta, b+t\sin\theta)$ と書くと，$\theta$ 方向微分は $f'_\theta(a,b)=\dfrac{d}{dt}F_\theta(0)$ である．（$\cos\theta, \sin\theta$ も定数である．）

(1) $f'_\theta(a,b)=f_x(a,b)\cos\theta+f_y(a,b)\sin\theta$ であることを示せ．（10点）

$x=a+t\cos\theta, y=b+t\sin\theta$ と置くと，合成関数の微分則より，

$$\frac{d}{dt}F_\theta(t)=\frac{d}{dt}f(x,y)=f_x(a+t\cos\theta,b+t\sin\theta)\frac{dx}{dt}+f_y(a+t\cos\theta,b+t\sin\theta)\frac{dy}{dt}.$$

ここで，$t=0$ とすると，

$$f'_\theta(a,b)=\frac{d}{dt}F_\theta(0)=f_x(a,b)\cos\theta+f_y(a,b)\sin\theta.$$

(2) 問5の $f(x,y)$ について，$0\le\theta<2\pi$ の範囲で $f'_\theta(1,1)$ が最大になる $\theta$ を求めよ．（10点）

$f_x(1,1)=f_y(1,1)=2$ より，$f'_\theta(1,1)=2\cos\theta+2\sin\theta=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$．よって，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $f'_\theta(1,1)=2\sqrt{2}$ をとる．$\theta=45^\circ$ の方向が最大勾配（一番急）である．

７．関数 $f(x,y)=\cos(x+y)$ について考える．

(1) 導関数 $f^{(1,0)}, f^{(0,1)}, f^{(2,0)}, f^{(1,1)}, f^{(0,2)}$ を求めよ．（10点）

$$f_x=f_y=-\sin(x+y),\ f_{xx}=f_{xy}=f_{yy}=-\cos(x+y).$$

(2) 2次のマクローリン展開

$$f(x,y)=\frac{f^{(0,0)}}{0!0!}+\frac{f^{(1,0)}}{1!0!}x+\frac{f^{(0,1)}}{0!1!}y+\frac{f^{(2,0)}}{2!}x^2+\frac{f^{(1,1)}}{1!1!}xy+\frac{f^{(0,2)}}{2!}y^2+R_3$$

を計算せよ．剰余項 $R_3$ は具体的に求めなくてもよい．この式で，$f^{(i,j)}$ は $f^{(i,j)}(0,0)$ を略記したものである．（10点）

$f^{(0,0)}=\cos 0=1, f^{(1,0)}=f^{(0,1)}=-\sin 0=0, f^{(2,0)}=f^{(1,1)}=f^{(0,2)}=-\cos 0=-1$ を代入して，

$$\begin{aligned} f(x,y)&=\frac{1}{0!0!}+\frac{0}{1!0!}x+\frac{0}{0!1!}y+\frac{-1}{2!}x^2+\frac{-1}{1!1!}xy+\frac{-1}{2!}y^2+R_3 \\ &=1-\frac{1}{2}x^2-xy-\frac{1}{2}y^2+R_3=1-\frac{1}{2}(x+y)^2+R_3. \end{aligned}$$