授業コード：73006-002, 77112-002	参照物：無し	回収：解答用紙のみ

微積分学Ⅱ2定期試験 '17.01/24

1．微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=x-2t+3$ の一般解を求めよ．（10点）

2．初期値問題 $x''(t)-2x'(t)+5x(t)=0, x(0)=1, x'(0)=1$ を解け．（10点）

3．接平面と法線について次の問に答えよ．

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $A(a,b,c)$,$c=f(a,b)$, における法線のパラメタ表示を書け．（5点）

(2) 球面 $z=f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ 上の点 $A\left(1,2,2\right)$ における接平面の方程式を書け．（5点）

4．関数 $f(x,y)=-x^2+2xy-3y^2+4y$ を考える．

(1) $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ を求めよ．（10点）

(2) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．（5点）

(3) $f(x,y)$ の極値を求めよ．極大値か極小値かを明記すること．（5点）

5． z が x, y の関数， x, y が u,v の関数であるとき， $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ の微分公式を書け．（10点）

6．2重積分 $V=\iint_D e^{x-y}\,dx\,dy$, $D: 0\le y\le x, 0\le x\le 1$ の値を求めよ．（10点）

7．累次積分 $V=\int_0^1\left\{\int_{-x}^{x} f(x,y)dy\right\}dx$ の積分領域を図示し，積分順序を変更せよ．（10点）

8．領域 $D: 1\le x^2+y^2\le 2$ 上の2重積分 $V=\iint_D \log(x^2+y^2)\,dx\,dy$ を極座標変換で求める．

(1) 積分領域 D を図示せよ．（5点）

(2) 極座標変換 $x=r\cos t, y=r\sin t$ のヤコビアン J を計算せよ．（5点）

(3) V を極座標変換せよ．（5点）

(4) V の値を求めよ．（5点）

微積分学Ⅱ2定期試験解答 ’17.01/24

１．微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=x-2t+3$ の一般解を求めよ．（10点）

$$x(t)=Ce^t+e^t\int e^{-t}(-2t+3)\,dt \overset{\text{部分積分}}{=} Ce^t+e^t\left\{-e^{-t}(-2t+3)-\int 2e^{-t}\,dt\right\}$$

$$=Ce^t+e^t\left\{-e^{-t}(-2t+3)+2e^{-t}\right\}=Ce^t+(2t-3)+2=Ce^{-t}+2t-1$$ (C は任意定数)．//

２．初期値問題 $x''(t)-2x'(t)+5x(t)=0, x(0)=1, x'(0)=1$ を解け．（10点）

・特性方程式： $\lambda^2-2\lambda+5=0$.

・特性解： $\lambda=1\pm 2i$ （共役複素解）.

・基本解： $x_1(t)=e^t\cos 2t, x_2(t)=e^t\sin 2t$.

・一般解： $x(t)=ax_1(t)+bx_2(t)=\left(a\cos t+b\sin t\right)e^t$ （ a,b は任意定数）.

・導関数： $x'(t)=(2a+b)\cos 2t+(a-2b)\sin 2t$.

初期条件 $x(0)=1, x'(0)=1$ に一般解とその導関数を代入して,

$$x(0)=a=1, x'(0)=a-2b=1 \Rightarrow a=1, b=0 .$$

ゆえに解は, $x(t)=e^t\cos 2t$. //

３．接平面と法線について次の問に答えよ．

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $A(a,b,c)$,$c=f(a,b)$, における法線のパラメタ表示を書け．（5点）

$$(x,y,z)=(a,b,c)+t(-f_x(a,b),-f_y(a,b),1) .\ //$$

(2) 球面 $z=f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ 上の点 $A\left(1,2,2\right)$ における接平面の方程式を書け．（5点）

$f_x=\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, f_y=\dfrac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$ より $f_x\left(1,2\right)=\dfrac{-1}{2}, f_y\left(1,2\right)=-1$ ．ゆえに，接平面は,

$$z=-\frac{1}{2}\left(x-1\right)-1\left(y-2\right)+2=-\frac{1}{2}x-y+\frac{9}{2}.$$

４．関数 $f(x,y)=-x^2+2xy-3y^2+4y$ を考える．

(1) $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ を求めよ．（10点）

$$f_x=-2x+2y, f_y=2x-6y+4, f_{xx}=-2, f_{xy}=2, f_{yy}=-6 .$$

(2) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．（5点）

$f_x=-2x+2y=0$ …①, $f_y=2x-6y+4=0$ …②を解いて, $x=1, y=1$ ．停留点は $(x,y)=\left(1,1\right)$.

(3) $f(x,y)$ の極値を求めよ．極大値か極小値かを明記すること．（5点）

$$A=f_{xx}(1,1)=-2<0, B=f_{xy}(1,1)=2, C=f_{yy}(1,-1)=-6, D=AC-B^2=12-4=8>0$$

であるから, $(x,y)=\left(1,1\right)$ は極大点で, 極小値 $f\left(1,1\right)=2$.

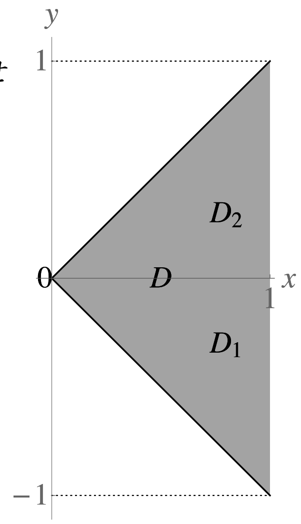
５．z が x, y の関数，x, y が u, v の関数であるとき，$\dfrac{\partial z}{\partial u}$ の微分公式を書け．（10点）

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\text{．} \quad //$$

６．2重積分 $V=\iint_D e^{x-y}\,dx\,dy$ ，$D: 0\le y\le x, 0\le x\le 1$ の値を求めよ．（10点）

$$V=\int_0^1\left(\int_0^x e^{x-y}\,dy\right)dx=\int_0^1\left[-e^{x-y}\right]_0^x dx=\int_0^1-(1-e^x)\,dx=\left[e^x-x\right]_0^1=(e-1)-1=e-2.$$

７．累次積分 $V=\int_0^1\left\{\int_{-x}^{x} f(x,y)\,dy\right\}dx$ の積分領域を図示し，積分順序を変更せよ．（10点）



積分領域は $D: -x\le y\le x,\ 0\le x\le 1$ の三角形(右図)．これは横線領域として $D=D_1+D_2$，$D_1: -y\le x\le 1, -1\le y\le 0$，$D_2: y\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$ と書ける．ゆえに，

$$V=\iint_{D_1} f\,dx\,dy+\iint_{D_2} f\,dx\,dy=\int_{-1}^{0}\left\{\int_{-y}^{1} f(x,y)\,dx\right\}dy+\int_0^1\left\{\int_y^1 f(x,y)\,dx\right\}dy\text{．} \quad //$$

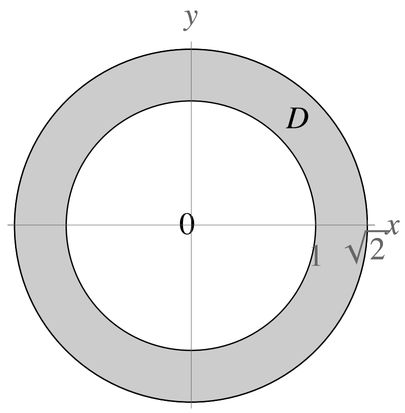
（別解）図より，$D: |y|\le x\le 1,\ -1\le y\le 1$ と書ける．ゆえに，

$$V=\int_{-1}^{1}\left\{\int_{|y|}^{1} f(x,y)\,dx\right\}dy\text{．} \quad //$$

８．領域 $D: 1\le x^2+y^2\le 2$ 上の2重積分 $V=\iint_D \log(x^2+y^2)\,dx\,dy$ を極座標変換で求める．

(1) 積分領域 D を図示せよ(下図)．（5点）

D は中心 $(0,0)$ 半径 $1,\sqrt{2}$ の同心円に囲まれる領域である．



(2) 極座標変換 $x=r\cos t, y=r\sin t$ のヤコビアン J を計算せよ．（5点）

$$J=\det\begin{pmatrix} x_r & x_t\\ y_r & y_t\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\cos t & -r\sin t\\ \sin t & r\cos t\end{pmatrix}=r\cos^2 t+r\sin^2 t=r\text{．} \quad //$$

(3) V を極座標変換せよ．（5点）

$$V=\int_0^{2\pi}\left(\int_1^{\sqrt{2}}\log\underbrace{r^2}_{x^2+y^2}\underbrace{r}_{|J|}\,dr\right)dt=\int_0^{2\pi}\left(\int_1^{\sqrt{2}} r\log r^2\,dr\right)dt=2\int_0^{2\pi}\left(\int_1^{\sqrt{2}} r\log r\,dr\right)dt$$

．//

(4) V の値を求めよ．（5点）

部分積分により，

$$\int_1^{\sqrt{2}} r\cdot\log r\,dr=\left[\frac{1}{2}r^2\cdot\log r\right]_1^{\sqrt{2}}-\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}r^2\cdot\frac{1}{r}\,dr=\frac{1}{2}2\log\sqrt{2}-\frac{1}{4}(2-1)=\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{4}$$

であるから，$V=2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{4}\right)dt=4\pi\left(\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{4}\right)=\pi\left(\log 4-1\right)$．//