授業コード：73006-002, 77112-002	参照物：無し	回収：解答用紙のみ

微積分学Ⅱ1定期試験 '16.01/26

1．微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=-x+\cos t$ の一般解を求めよ．（10点）

積分公式：$\int e^{at}\cos t\,dt=\dfrac{e^{at}(a\cos t+\sin t)}{1+a^2}$．

2．初期値問題 $x''(t)+2x'(t)+x(t)=0,\ x(0)=1,\ x'(0)=0$ を解け．（10点）

3．接平面について次の問に答えよ．

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $A(a,b,c)$,$c=f(a,b)$, における接平面の方程式を書け．（5点）

(2) 曲面 $z=f(x,y)=4\sin x\sin y$ 上の点 $A\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6},\sqrt{3}\right)$ における接平面の方程式を書け．（5点）

4．関数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+2y+1$ を考える．

(1) $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ を求めよ．（10点）

(2) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．（5点）

(3) $f(x,y)$ の極値を求めよ．極大値か極小値かを明記すること．（5点）

5．z が x, y の関数，x, y が t の関数であるとき，$\dfrac{dz}{dt}$ の微分公式を書け．（10点）

6．2重積分 $V=\iint_D x^{-2}\,dx\,dy$,$D:\dfrac{1}{y+2}\le x\le\dfrac{1}{y+1}, 0\le y\le 1$ の値を求めよ．（10点）

7．累次積分 $V=\int_0^1\left\{\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,dy\right\}dx$ の積分領域を図示し，積分順序を変更せよ．（10点）

8．領域 $D: x^2+y^2\le x,\ y\ge 0$ 上の2重積分 $V=\iint_D\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$ を極座標変換で求める．

(1) 積分領域 D を図示せよ．（5点）

(2) 極座標変換 $x=r\cos t, y=r\sin t$ のヤコビアン J を計算せよ．（5点）

(3) V を極座標変換せよ．（5点）

(4) V の値を求めよ．（5点）

微積分学II1定期試験解答 '16.01/26

１．微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=-x+\cos t$ の一般解を求めよ．（10点）

$$x(t)=Ce^{-t}+e^{-t}\int e^t\cos t\,dt=Ce^{-t}+e^{-t}\frac{e^t(\cos t+\sin t)}{2}=Ce^{-t}+\frac{\cos t+\sin t}{2}\quad (C\text{ は任意定数}).\ //$$

２．初期値問題 $x''(t)+2x'(t)+x(t)=0, x(0)=1, x'(0)=0$ を解け．（10点）

・特性方程式：$\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2=0$．

・特性解：$\lambda=-1$（重解）．

・基本解：$x_1(t)=e^{-t}, x_2(t)=te^{-t}$．

・一般解：$x(t)=ax_1(t)+bx_2(t)=(a+bt)e^{-t}$（$a,b$ は任意定数）．

・導関数：$x'(t)=-(a+bt)e^{-t}+be^{-t}$．

初期条件 $x(0)=1, x'(0)=0$ に一般解とその導関数を代入して，

$$x(0)=a=1, x'(0)=-a+b=0 \Rightarrow a=1, b=1.$$

ゆえに解は，$x(t)=(1+t)e^{-t}$．//

３．接平面について次の問に答えよ．

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $A(a,b,c)$,$c=f(a,b)$, における接平面の方程式を書け．（5点）

$$z=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+c\ .\ //$$

(2) 曲面 $z=f(x,y)=4\sin x\sin y$ 上の点 $A\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6},\sqrt{3}\right)$ における接平面の方程式を書け．（5点）

$f_x(x,y)=4\cos x\sin y,\ f_y(x,y)=4\sin x\cos y$ より $f_x\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right)=1, f_y\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right)=3$．また $f\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$ ゆえ，

接平面は，

$$z=1\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+3\left(y-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=x+3y-\frac{5\pi}{6}+\sqrt{3}.$$

４．関数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+2y+1$ を考える．

(1) $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ を求めよ．（10点）

$$f_x=2x-y-2, f_y=-x+2y+2, f_{xx}=2, f_{xy}=-1, f_{yy}=2\ .$$

(2) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．（5点）

$f_x=2x-y-2=0\cdots$①，　$f_y=-x+2y+2=0\cdots$②を解いて，　$x=\dfrac{2}{3}, y=-\dfrac{2}{3}$．

以上より停留点は $(x,y)=\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$．

(3) $f(x,y)$ の極値を求めよ．極大値か極小値かを明記すること．（5点）

$$A = f_{xx}(1,-1) = 2 > 0, B = f_{yy}(1,-1) = -1, C = f_{xy}(1,-1) = 2, D = AC - B^2 = 3 > 0$$

であるから，$(x,y) = (1,-1)$ は極小点で，極小値 $f(1,-1) = -\dfrac{1}{3}$．

5．z が x, y の関数，x, y が t の関数であるとき，$\dfrac{dz}{dt}$ の微分公式を書け．（10点）

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\text{．//}$$

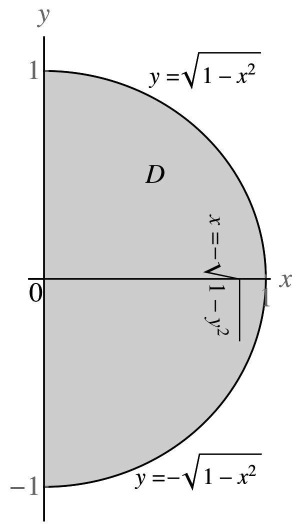
6．2重積分 $V = \iint_D x^{-2}\,dx\,dy$ ，$D: \dfrac{1}{y+2} \le x \le \dfrac{1}{y+1}, 0 \le y \le 1$ の値を求めよ．（10点）

$$V = \int_0^1 \left(\int_{1/(y+2)}^{1/(y+1)} x^{-2}\,dx \right) dy = \int_0^1 \Big[-x^{-1} \Big]_{1/(y+2)}^{1/(y+1)} dy = \int_0^1 1\,dy = 1.$$

7．累次積分 $V = \int_0^1 \left\{ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy \right\} dx$ の積分領域を図示し，積分順序を変更せよ．（10点）

積分領域は $D: -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$, $0 \le x \le 1$ の半円(右図)．これは横線領域として $D: 0 \le x \le \sqrt{1-y^2}, -1 \le y \le 1$ と書ける．ゆえに，

$$V = \int_{-1}^1 \left\{ \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx \right\} dy\text{．//}$$



8．領域 $D: x^2 + y^2 \le x,\ y \ge 0$ 上の2重積分 $V = \iint_D \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$ を極座標変換で求める．

(1) 積分領域 D を図示せよ(下図)．（5点）

D は中心 $(1/2, 0)$ 半径 $1/2$ の円板である．

(2) 極座標変換 $x = r\cos t, y = r\sin t$ のヤコビアン J を計算せよ．（5点）

$$J = \det\begin{pmatrix} x_r & x_t \\ y_r & y_t \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{pmatrix} = r\cos^2 t + r\sin^2 t = r\text{．//}$$

(3) V を極座標変換せよ．（5点）

$$V = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\cos t} \frac{1}{\underbrace{r}_{\sqrt{x^2+y^2}}} \underbrace{r}_{|J|}\,dr \right) dt = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\cos t} dr \right) dt\text{．//}$$

(4) V の値を求めよ．（5点）

$$V = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\cos t} dr \right) dt = \int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = \big[\sin t\big]_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1\text{．//}$$