授業コード：73006-002	参照物：無し	回収：解答用紙のみ

微積分学Ⅱ1定期試験 ’15.01.27

１．微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=-x+\cosh t$ の一般解を求めよ．（10点）

２．初期値問題 $x''(t)-2x'(t)+5x(t)=0, x(0)=0, x'(0)=1$ を解け．（10点）

３．接平面について次の問に答えよ．

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $A(a,b,c)$,$c=f(a,b)$, における法線をパラメタ表示せよ．（5点）

(2) 円錐面 $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ の点 $A(3,-4,5)$ における接平面の方程式を書け．（5点）

４．領域 $-1<x<2,-1<y<2$ で，関数 $f(x,y)=\sin x\sin y$ を考える．

(1) $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ を求めよ．（10点）

(2) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．（5点）

(3) $f(x,y)$ の極値を求めよ．極大値か極小値かを明記すること．（5点）

５． z が x,y の関数， x,y が s,t の関数であるとき， $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ を求めるための合成関数の微分公式を書け．（10点）

６．2重積分 $V=\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy$ ，$D:0\le y\le \log x, 1\le x\le 2$ の値を求めよ．（10点）

７．累次積分 $V=\int_0^1\left\{\int_0^x f(x,y)dy\right\}dx$ の積分領域を図示し，積分順序を変更せよ．（10点）

８．領域 $D:x^2+y^2\le\dfrac{\pi}{2}$ 上の2重積分 $V=\iint_D \cos(x^2+y^2)\,dx\,dy$ を極座標変換で求める．

(1) 積分領域 D を図示せよ．（5点）

(2) 極座標変換 $x=r\cos t, y=r\sin t$ のヤコビアン J を計算せよ．（5点）

(3) V を極座標変換せよ．（5点）

(4) V の値を求めよ．（5点）

１．微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} = -x + \cosh t$ の一般解を求めよ．（10点）

$$x(t) = Ce^{-t} + e^{-t}\int e^t \frac{e^t + e^{-t}}{2}dt = Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t}\left\{\int (1+e^{2t})dt\right\} = Ce^{-t} + \frac{1}{4}e^{-t}\left(2t + e^{2t}\right) \quad (C\text{ は任意定数}).\ //$$

２．初期値問題 $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 0, x(0) = 0, x'(0) = 1$ を解け．（10点）

・特性方程式： $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$．

・特性解： $\lambda = 1 \pm 2i$ （共役複素解）．

・基本解： $x_1(t) = e^t\cos 2t, x_2(t) = e^t \sin 2t$．

・一般解： $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) = e^t\left(a\cos 2t + b\sin 2t\right)$ （a,b は任意定数）．

・導関数： $x'(t) = e^t\left(a\cos 2t + b\sin 2t\right) + 2e^t\left(-a\sin 2t + b\cos 2t\right)$．

初期条件 $x(0) = 0, x'(0) = 1$ に一般解とその導関数を代入して，

$$x(0) = a = 0, x'(0) = a + 2b = 1 \ \Rightarrow\ a = 0, b = 1/2.$$

ゆえに解は， $x(t) = e^t\left(0\cos 2t + \dfrac{1}{2}\sin 2t\right) = \dfrac{1}{2}e^t \sin 2t$． //

３．接平面について次の問に答えよ．

(1) 曲面 $z = f(x,y)$ 上の点 $A(a,b,c)$,$c = f(a,b)$, における法線をパラメタ表示せよ．（5点）

$$(x,y,z) = (a,b,c) + t(f_x(a,b), f_y(a,b), -1).\ //$$

(2) 円錐面 $z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ の点 $A(3,-4,5)$ における接平面の方程式を書け．（5点）

$$f_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ より $f_x(3,-4) = \dfrac{3}{5}, f_y(3,-4) = -\dfrac{4}{5}$．接平面は，

$$z = f_x(3,-4)(x-3) + f_y(3,-4)(y+4) + 5 = \frac{3}{5}(x-3) - \frac{4}{5}(y+4) + 5 = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y.$$

４．領域 $-1 < x < 2, -1 < y < 2$ …⓪で，関数 $f(x,y) = \sin x \sin y$ を考える．

(1) $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ を求めよ．（10点）

$$f_x = \cos x \sin y, f_y = \sin x \cos y, f_{xx} = -\sin x \sin y, f_{xy} = \cos x \cos y, f_{yy} = -\sin x \sin y.$$

(2) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．（5点）

$f_x = \cos x \sin y = 0$ …①， $f_y = \sin x \cos y = 0$ …②を解く．①より， $\cos x = 0$ *or* $\sin y = 0$．

イ） $\cos x = 0$ のとき，⓪より， $x = \pi/2$．②に代入して， $\cos y = 0$．⓪より $y = \pi/2$．

ロ） $\sin y = 0$ のとき，⓪より， $x = 0$．②に代入して， $\sin x = 0$．⓪より $y = 0$．

以上より停留点は $(x,y)=(\pi/2,\pi/2),(0,0)$ の2点.

(3) $f(x,y)$ の極値を求めよ．極大値か極小値かを明記すること．（5点）

イ） $(x,y)=(\pi/2,\pi/2)$ のとき，

$$A=f_{xx}(x,y)=-1<0, B=f_{xy}(x,y)=0, C=f_{yy}(x,y)=-1, D=AC-B^2=1>0$$

であるから， $(x,y)=(\pi/2,\pi/2)$ は極大点で，極大値 $f(\pi/2,\pi/2)=1$．

ロ） $(x,y)=(0,0)$ のとき，

$$A=f_{xx}(x,y)=0, B=f_{xy}(x,y)=1, C=f_{yy}(x,y)=0, D=AC-B^2=-1<0$$

であるから， $(x,y)=(0,0)$ は鞍点.

５． z が x,y の関数， x,y が s,t の関数であるとき， $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ を求めるための合成関数の微分公式を書け．（10点） $\dfrac{\partial z}{\partial t}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}$．//

６．2重積分 $V=\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy$, $D:0\le y\le \log x, 1\le x\le 2$ の値を求めよ．（10点）

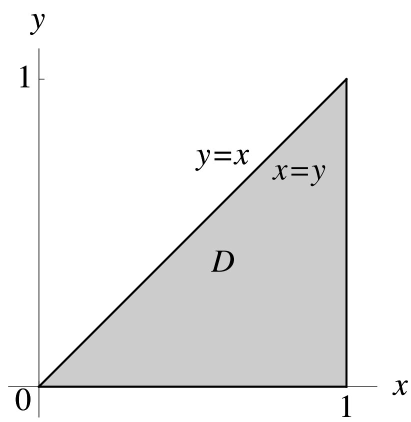
$$V=\int_1^2\left(\int_0^{\log x} e^{x+y}\,dy\right)dx=\int_1^2 e^x\left[e^y\right]_0^{\log x}dx=\int_1^2 (x-1)e^x\,dx$$
$$=\left[(x-1)e^x\right]_1^2-\int_1^2 e^x\,dx=e^2-(e^2-e)=e.$$

（第4の等号は部分積分．）

７．累次積分 $V=\int_0^1\left\{\int_0^x f(x,y)dy\right\}dx$ の積分領域を図示し，積分順序を変更せよ．（10点）

積分領域は $D:0\le x\le 1,\ 0\le y\le x$ (右図)．これは横線領域として $D:0\le y\le 1,\ y\le x\le 1$ と書ける．ゆえに，

$$V=\int_0^1\left\{\int_y^1 f(x,y)dx\right\}dy\ .\ //$$

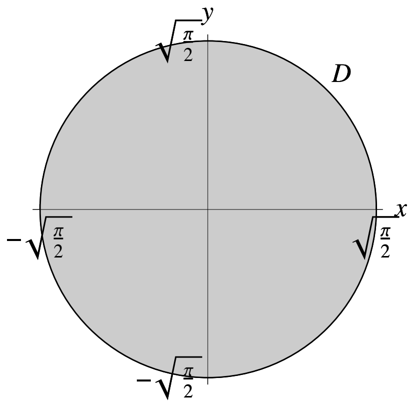


８．領域 $D:x^2+y^2\le\dfrac{\pi}{2}$ 上の2重積分 $V=\iint_D \cos(x^2+y^2)\,dx\,dy$ を極座標変換で求める.

(1) 積分領域 D を図示せよ(下図)．（5点）

(2) 極座標変換 $x=r\cos t, y=r\sin t$ のヤコビアン J を計算せよ．（5点）

$$J=\det\begin{pmatrix} x_r & x_t \\ y_r & y_t \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{pmatrix}=r\cos^2 t+r\sin^2 t=r\ . \quad //$$



(3) V を極座標変換せよ．（5点）

$$V=\iint_D \cos(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{\pi/2}}\underbrace{r}_{|J|}\cos r^2\,dr\right)dt\ . \quad //$$

(4) V の値を求めよ．（5点）

$u=r^2$ と置くと， $du=2rdr$ と $\begin{array}{c|c} r & 0 \to \sqrt{\pi/2} \\ \hline u & 0 \to \pi/2 \end{array}$ より，

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} r\cos r^2\,dr=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos u\,du=\frac{1}{2}[\sin u]_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\ .$$

ゆえに，

$$V=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}dt=\pi\ . \quad //$$