授業コード：73006-002	参照物：無し	回収：解答用紙のみ

微積分学Ⅱ1定期試験 '14.01.21

1．微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} = x + e^t$ の一般解を求めよ．（10点）

2．初期値問題 $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0, x(0) = 0, x'(0) = 1$ を解け．（10点）

3．接平面について次の問に答えよ．

(1) 曲面 $z = f(x,y)$ 上の点 $A(a,b,c)$,$c = f(a,b)$, における接平面の方程式を書け．（5点）

(2) 楕円面 $z = f(x,y) = \sqrt{4 - 2x^2 - y^2}$ の点 $A(1,1,1)$ における法線を求めよ．（5点）

4．関数 $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2 + 16x$ について，次の問に答えよ．

(1) $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ を求めよ．（10点）

(2) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．（5点）

(3) $f(x,y)$ の極値を求めよ．極大値か極小値かを明記すること．（5点）

5． z が x, y の関数， x, y が t の関数であるとき， $\dfrac{dz}{dt}$ を求めるための合成関数の微分公式を書け．（10点）

6．2重積分 $V = \iint_D y\,dx\,dy$,$D: 0 \le y \le \sin x, 0 \le x \le \pi$ の値を求めよ．（10点）

7．累次積分 $V = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x^2} f(x,y)\,dy \right\} dx$ の積分領域を図示し，積分順序を変更せよ．（10点）

8．領域 $D: 1 \le x^2 + y^2 \le 2$ 上の2重積分 $V = \iint_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$ を極座標変換で求める．

(1) 積分領域 D を図示せよ．（5点）

(2) 極座標変換 $x = r\cos t, y = r\sin t$ のヤコビアン J を計算せよ．（5点）

(3) V を極座標変換せよ．（5点）

(4) V の値を求めよ．（5点）

１．微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=x+e^t$ の一般解を求めよ．（10点）

$$\therefore x(t)=e^t\left(\int e^t e^{-t}\,dt+C\right)=e^t\left(\int dt+C\right)=Ce^t+te^t \quad (C\text{ は任意定数}).\ //$$

２．初期値問題 $x''(t)+3x'(t)+2x(t)=0, x(0)=0, x'(0)=1$ を解け．（10点）

・特性方程式： $\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda+2)=0$ ．

・特性解： $\lambda=-1,-2$ （2実解）．

・基本解： $x_1(t)=e^{-t}, x_2(t)=e^{-2t}$ ．

・一般解： $x(t)=ax_1(t)+bx_2(t)=ae^{-t}+be^{-2t}$ （ a,b は任意定数）．

・導関数： $x'(t)=-ae^{-t}-be^{-2t}$ ．

初期条件 $x(0)=0, x'(0)=1$ に一般解とその導関数を代入して，

$$x(0)=a+b=0, x'(0)=-a-2b=1 \Rightarrow a=1,b=-1 .$$

ゆえに解は， $x(t)=ax_1(t)+bx_2(t)=e^{-t}-e^{-2t}$ ．//

３．接平面について次の問に答えよ．

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $A(a,b,c)$,$c=f(a,b)$, における接平面の方程式を書け．（5点）

$$z=c+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b) .\ //$$

(2) 楕円面 $z=f(x,y)=\sqrt{4-2x^2-y^2}$ の点 $A(1,1,1)$ における法線を求めよ．（5点）

$$f_x(x,y)=\frac{-2x}{\sqrt{4-2x^2-y^2}},\ f_y(x,y)=\frac{-y}{\sqrt{4-2x^2-y^2}} \text{ より } f_x(1,1)=-2, f_y(1,1)=-1 .\ \text{ゆえに，}$$

①法線ベクトル： $\boldsymbol{n}=(f_x,f_y,-1)=(-2,-2,-1)$ ．

②法線のパラメタ表示： $(x,y,z)=(a,b,f(a,b))+t\boldsymbol{n}=(1,1,1)+t(-2,-1,-1)$ $(-\infty<t<\infty)$

③法線の方程式： $\dfrac{x-a}{f_x}=\dfrac{y-b}{f_y}=c-z$ すなわち， $\dfrac{x-1}{2}=y-1=z-1$ ．

①，②，③のいずれかを書けばよい．

４．関数 $f(x,y)=3x^2+2xy+3y^2+16x$ について，次の問に答えよ．

(1) $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ を求めよ．（10点）

$$f_x=6x+2y+16, f_y=2x+6y, f_{xx}=6, f_{xy}=2, f_{yy}=6 .\ //$$

(2) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．（5点）

$$\begin{cases} f_x(x,y)=6x+2y+16=0, \\ f_y(x,y)=2x+6y=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3, \\ y=1. \end{cases} \quad \text{ゆえに，} (x,y)=(-3,1) .\ //$$

(3) $f(x,y)$ の極値を求めよ．極大値か極小値かを明記すること．（5点）

$f_x = 6x + 2y + 16, f_y = 2x + 6y, f_{xx} = 6, f_{xy} = 2, f_{yy} = 6$ より，

$$D(-3,1) = f_{xx}(-3,1) f_{yy}(-3,1) - f_{xy}(-3,1)^2 = 6 \times 6 - 2^2 = 32 > 0,\ f_{xx}(-3,1) = 6 > 0 .$$

ゆえに，$(x, y) = (-3,1)$ のとき極小．極小値は，$f(-3,1) = -24$．//

5．z が x, y の関数，x, y が t の関数であるとき，$\dfrac{dz}{dt}$ を求めるための合成関数の微分公式を書け．（10点）　$\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$．//

6．2重積分 $V = \iint_D y\,dx\,dy$ ，$D: 0 \le y \le \sin x, 0 \le x \le \pi$ の値を求めよ．（10点）

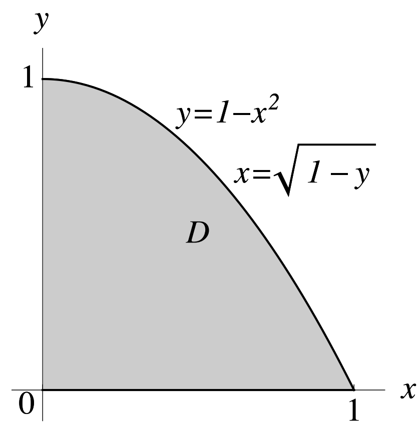
$$V = \int_0^\pi \left(\int_0^{\sin x} y\,dy \right) dx = \int_0^\pi \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{\sin x} dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx = \frac{\pi}{4} .$$

（最後の等式は $\int_0^\pi \cos 2x\,dx = 0$ を使った．）

7．累次積分 $V = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x^2} f(x,y)\,dy \right\} dx$ の積分領域を図示し，積分順序を変更せよ．（10点）

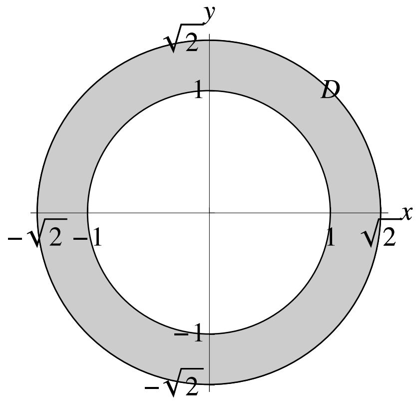
積分領域は $D: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x^2$ （右図）．これは横線領域として $D: 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \sqrt{1-y}$ と書ける．ゆえに，

$$V = \int_0^1 \left\{ \int_0^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx \right\} dy .\ //$$



8．領域 $D: 1 \le x^2 + y^2 \le 2$ 上の2重積分 $V = \iint_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$ を極座標変換で求める．

(1) 積分領域 D を図示せよ．（5点）
　右図．//



(2) 極座標変換 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ のヤコビアン J を計算せよ．（5点）

$$J = \det\begin{pmatrix} x_r & x_t \\ y_r & y_t \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{pmatrix} = r\cos^2 t + r\sin^2 t = r .\ //$$

(3) V を極座標変換せよ．（5点）

図より，$1 \le r \le \sqrt{2},\ 0 \le t \le 2\pi$ ゆえ，

$$V=\int_0^{2\pi}\left(\int_1^{\sqrt{2}}\underbrace{e^{r^2}}_{e^{x^2+y^2}}\underbrace{r}_{|J|}\,dr\right)dt=\int_0^{2\pi}\left(\int_1^{\sqrt{2}}re^{r^2}\,dr\right)dt\ .\ //$$

(4) V の値を求めよ．（5点）

変数変換 $u=r^2$, $du=2rdr$, $\begin{array}{c|l} r & 1 \to \sqrt{2} \\ \hline u & 1 \to \ \ 2 \end{array}$ により，

$$\int_1^{\sqrt{2}}re^{r^2}\,dr=\frac{1}{2}\int_1^2 e^u\,du=\frac{1}{2}(e^2-e).$$

$$\therefore\ V=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(e^2-e)dt=\frac{2\pi}{2}(e^2-e)=\pi e(e-1).//$$