| 授業コード：73006-002 | 参照物：無し | 回収：解答用紙のみ |
|---|---|---|

# 微積分学Ⅱ1定期試験 '13.01.22

1．微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=-x+t$ の一般解を求めよ．（10点）

2．初期値問題 $x''(t)+2x'(t)+2x(t)=0, x(0)=1, x'(0)=-1$ を解け．（10点）

3．接平面について次の問に答えよ．

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $A(a,b,c)$ ,$c=f(a,b)$, における接平面の方程式を書け．（5点）

(2) 放物面 $z=f(x,y)=x^2+y^2$ の点 $A(1,1,2)$ における接平面の方程式を書け．（5点）

4．関数 $f(x,y)=(x+y^2)e^x$ について，次の問に答えよ．

(1) $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ を求めよ．（10点）

(2) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．（5点）

(3) $f(x,y)$ の極値を求めよ．極大値か極小値かを明記すること．（5点）

5． $z$ が $u,v$ の関数， $u,v$ が $x,y$ の関数であるとき， $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を求めるための合成関数の微分公式を書け．（10点）

6．2重積分 $V=\iint_D y\,dx\,dy$ ，$D:0\le y\le e^x, 0\le x\le 1$ の値を求めよ．（10点）

7．累次積分 $V=\int_0^1\left\{\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy\right\}dx$ の積分領域を図示し，積分順序を変更せよ．（10点）

8．領域 $D:x^2+y^2\le x$ 上の2重積分 $V=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ を極座標変換で求める．

(1) 積分領域 $D$ を図示せよ．（5点）

(2) 極座標変換 $x=r\cos t, y=r\sin t$ のヤコビアン $J$ を計算せよ．（5点）

(3) $V$ を極座標変換せよ．（5点）

(4) $V$ の値を求めよ．（5点）

１．微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=-x+t$ の一般解を求めよ．（10点）

部分積分により $\int e^t t\,dt = te^t - e^t = (t-1)e^t$ ．

$$\therefore x(t)=e^{-t}\left(\int e^t t\,dt + C\right)=e^{-t}\left((t-1)e^t + C\right)=Ce^{-t}+t-1 \quad (C \text{ は任意定数}).\ //$$

２．初期値問題 $x''(t)+2x'(t)+2x(t)=0, x(0)=1, x'(0)=-1$ を解け．（10点）

・特性方程式：$\lambda^2+2\lambda+2=0$

・特性解：$\lambda=-1\pm i$ （共役複素解）．

・基本解：$x_1(t)=e^{-t}\cos t, x_2(t)=e^{-t}\sin t$ ．

・一般解：$x(t)=ax_1(t)+bx_2(t)=e^{-t}(a\cos t+b\sin t)$ （$a,b$ は任意定数）．

・導関数：$x'(t)=e^{-t}\left\{(-a+b)\cos t-(a+b)\sin t\right\}$ ．

初期条件 $x(0)=1, x'(0)=-1$ に一般解とその導関数を代入して，

$$x(0)=a=1, x'(0)=-a+b=-1 \Rightarrow a=1, b=0 .$$

ゆえに解は，$x(t)=e^{-t}\cos t$ ．//

３．接平面について次の問に答えよ．

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $A(a,b,c)$ ,$c=f(a,b)$, における接平面の方程式を書け．（5点）

$$z=c+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)\ .\ //$$

(2) 放物面 $z=f(x,y)=x^2+y^2$ の点 $A(1,1,2)$ における接平面の方程式を書け．（5点）

$f_x(x,y)=2x$ ，$f_y(x,y)=2y$ より $f_x(1,1)=2$ ，$f_y(1,1)=2$ ．ゆえに，

$$z=c+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)=2+2(x-1)+2(y-1)=2x+2y-2\ .\ //$$

４．関数 $f(x,y)=(x+y^2)e^x$ について，次の問に答えよ．

(1) $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ を求めよ．（10点）

$$f_x=(1+x+y^2)e^x, f_y=2ye^x, f_{xx}=(2+x+y^2)e^x, f_{xy}=2ye^x, f_{yy}=2e^x\ .\ //$$

(2) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．（5点）

$$\begin{cases} f_x(x,y)=(1+x+y^2)e^x=0, \\ f_y(x,y)=2ye^x=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1, \\ y=0. \end{cases} \quad \text{ゆえに，}\ (x,y)=(-1,0)\ .\ //$$

(3) $f(x,y)$ の極値を求めよ．極大値か極小値かを明記すること．（5点）

$D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=e^{-1}\cdot 2e^{-1}-0^2=2e^{-2}>0,\ f_{xx}(-1,0)=e^{-1}>0$ より，

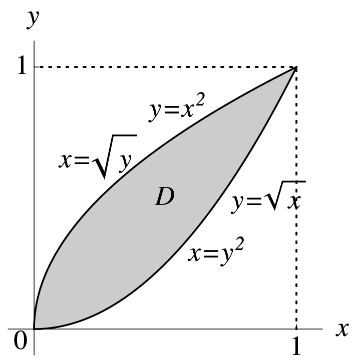
$(x,y)=(-1,0)$ のとき極小．極小値は，$f(-1,0)=-e^{-1}=-\dfrac{1}{e}$．//

5．$z$ が $u,v$ の関数，$u,v$ が $x,y$ の関数であるとき，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を求めるための合成関数の微分公式を書け．（10点）　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$．//

6．2重積分 $V=\iint_D y\,dx\,dy$ ，$D:0\le y\le e^x, 0\le x\le 1$ の値を求めよ．（10点）

$$V=\int_0^1\left(\int_0^{e^x} y\,dy\right)dx=\int_0^1\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{e^x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\frac{1}{4}(e^2-1)\text{．//}$$

7．累次積分 $V=\int_0^1\left\{\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\right\}dx$ の積分領域を図示し，積分順序を変更せよ．（10点）

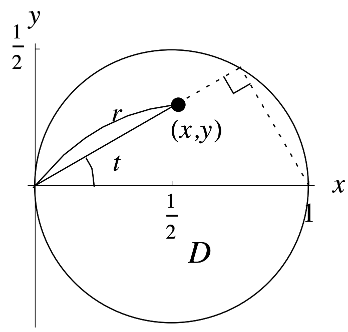



図より，$D:0\le x\le 1,\ x^2\le y\le \sqrt{x}$．また，$D:0\le y\le 1,\ y^2\le x\le \sqrt{y}$ でもある．ゆえに，

$$V=\int_0^1\left\{\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right\}dy\text{．//}$$

8．領域 $D:x^2+y^2\le x$ 上の2重積分 $V=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ を極座標変換で求める．

(1) 積分領域 $D$ を図示せよ．（5点）




平方完成により，$(x-1/2)^2+y^2\le(1/2)^2$ ゆえ，$D$ は中心 $(1/2,0)$ 半径 $1/2$ の閉円板である．//

(2) 極座標変換 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ のヤコビアン $J$ を計算せよ．（5点）

$$J=\det\begin{pmatrix} x_r & x_t \\ y_r & y_t \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{pmatrix}=r\cos^2 t+r\sin^2 t=r\text{．//}$$

(3) $V$ を極座標変換せよ．（5点）

図より，$-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le r\le\cos t$ であるから，

$$V=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos t}\underbrace{\sqrt{r^2\cos^2 t+r^2\sin^2 t}}_{\sqrt{x^2+y^2}}\,\underbrace{r}_{|J|}\,dr\right)dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos t} r^2\,dr\right)dt\text{．//}$$

(4) $V$ の値を求めよ．（5点）

$\int_0^{\cos t} r^2\,dr = \dfrac{1}{3}\cos^3 t$ であるから，変数変換 $u = \sin t$，$du = \cos t dt$，$\begin{array}{c|ccc} t & -\pi/2 & \to & \pi/2 \\ \hline u & -1 & \to & 1 \end{array}$ により，

$$V = \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 t\,dt = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(1-u^2)\,du = \frac{2}{3}\int_0^1 (1-u^2)\,du = \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}.\quad //$$