微積分学II第9回 極値問題

1．2変数関数の極値

関数 $z=f(\boldsymbol{x})=f(x,y)$ $(\boldsymbol{x}=(x,y))$ を考える．

［極大値］点 $\boldsymbol{a}$ に十分近い $\boldsymbol{x}$ に対して， $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{a} \Rightarrow f(\boldsymbol{x})<f(\boldsymbol{a})$ なら，関数 $f(\boldsymbol{x})$ は点 $\boldsymbol{a}$ において**極大**になるといい， $f(\boldsymbol{a})$ を**極大値**という．//

［極小値］点 $\boldsymbol{a}$ に十分近い $\boldsymbol{x}$ に対して， $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{a} \Rightarrow f(\boldsymbol{x})>f(\boldsymbol{a})$ なら，関数 $f(\boldsymbol{x})$ は点 $\boldsymbol{a}$ において**極小**になるといい， $f(\boldsymbol{a})$ を**極小値**という．//

［命題1］関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとるなら， $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ ．//

（証明）条件より，1変数関数 $F(x)=f(x,b)$ は $x=a$ で極値をとるから， $F'(a)=f_x(a,b)=0$ ．同様に，$G(y)=f(a,y)$ は $y=b$ で極値をとるから， $G'(y)=f_y(a,b)=0$ ．//

［停留点］点 $\boldsymbol{a}=(a,b)$ で $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ のとき， $\boldsymbol{a}$ を関数 $f(x,y)$ の**停留点**という．//

☆点 $\boldsymbol{a}=(a,b)$ から θ 方向に動いたときの関数 $f(x,y)$ の変化を $F_\theta(t)=f(a+t\cos\theta,b+t\sin\theta)$ で表す．

$f(a,b)$ が極大(極小)であることと，任意の θ で $F_\theta(0)=f(a,b)$ が極大(極小)であることは同値である．//

☆ $F_\theta(0)=f(a,b)$ が極大(極小)なら， $F_\theta'(0)=0$ ．//

☆ $F_\theta'(0)=0$ のとき， $F_\theta''(0)>0$ なら， $F_\theta(0)=f(a,b)$ は極小， $F_\theta''(0)<0$ なら，極大．//

［命題2］点 (a,b) が $f(x,y)$ の停留点なら，任意の θ で $F_\theta'(0)=0$ ．//

（証明） $F_\theta'(0)=f_x(a,b)\cos\theta+f_y(a,b)\sin\theta=0$ ．//

以上をまとめて，

［命題3］停留点 (a,b) において，

(1) 任意の θ で $F_\theta''(0)>0$ なら， $f(a,b)$ は極小，

(2) 任意の θ で $F_\theta''(0)<0$ なら， $f(a,b)$ は極大，

(3) $F_\theta''(0)$ の符号が θ で一定でないなら， $f(a,b)$ は極値ではない．//

2．極値の探索

$F_\theta(t)=f(a+t\cos\theta,b+t\sin\theta)$ ゆえ，第7回式(2)で $\alpha=\cos\theta,\beta=\sin\theta,t=0$ として，

$$F_\theta''(0)=f_{xx}(a,b)\cos^2\theta+2f_{xy}(a,b)\cos\theta\sin\theta+f_{yy}(a,b)\sin^2\theta.$$

簡単のため， $A=f^{(2,0)}=f_{xx}(a,b),B=f^{(1,1)}=f_{xy}(a,b),C=f^{(0,2)}=f_{yy}(a,b)$ と書くと，

$$
\begin{aligned}
F_\theta''(0) &= A\frac{1+\cos 2\theta}{2} + B\sin 2\theta + C\frac{1-\cos 2\theta}{2} \\
&= \frac{A+C}{2} + \frac{A-C}{2}\cos 2\theta + B\sin 2\theta. \\
&= \frac{A+C}{2} + R\sin(2\theta+\varphi), \\
& \qquad R = \sqrt{\left(\frac{A-C}{2}\right)^2 + B^2},\ \sin\varphi = \frac{A-C}{2R},\ \cos\varphi = \frac{B}{R}.
\end{aligned}
$$

これより，$|(A+C)/2| > R$ すなわち，

$$D = \left(\frac{A+C}{2}\right)^2 - R^2 = \left(\frac{A+C}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-C}{2}\right)^2 - B^2 = AC - B^2 > 0$$

なら，$F_\theta''(0)$ の符号は一定で，$(A+C)/2$ の符号と一致する．また，$D>0$ なら $AC > B^2 \geq 0$ ゆえ，A と C の符号は一致する．ゆえに，$D>0$ なら，$F_\theta''(0)$ の符号は一定で，A の符号と一致する．以上より，次の極値探索法を得る．

――――　極値探索法　――――

[1] 連立方程式 $\begin{cases} f_x(x,y)=0, \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$ を解き，停留点 $(x,y)=(a,b)$ を全て求める．

[2] 各停留点で $A = f_{xx}(a,b), B = f_{xy}(a,b), C = f_{yy}(a,b), D = AC - B^2$ を計算．

(1) $D>0, A>0$ なら，(a,b) は極小点，

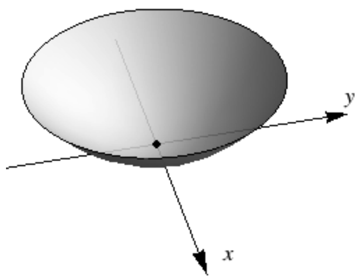
(2) $D>0, A<0$ なら，(a,b) は極大点，

(3) $D<0$ なら，(a,b) は鞍点（極大点でも極小点でもない），

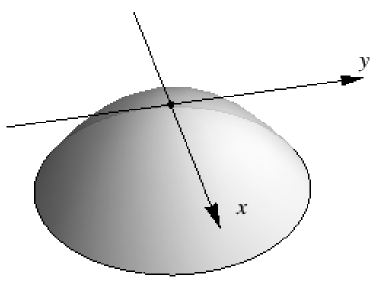
(4) $D=0$ なら，2次偏導関数までででは判定不能．

――――――――――――――

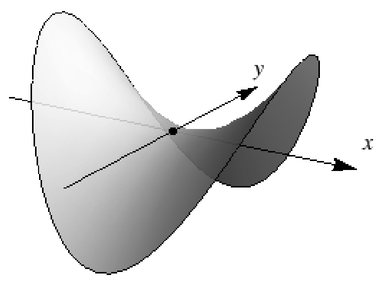
［例］判定の符号は典型的な例で思い出す．



(1) 極小点($D>0, A>0$)



(2) 極大点($D>0, A<0$)



(3) 鞍点($D<0$)

例： $f(x,y) = x^2 + y^2$

$(x,y) = (0,0)$ で，

$(A,B,C,D) = (2,0,2,4)$

$f(x,y) = -x^2 - y^2$

$(x,y) = (0,0)$ で，

$(A,B,C,D) = (-2,0,-2,4)$

$f(x,y) = x^2 - y^2$

$(x,y) = (0,0)$ で，

$(A,B,C,D) = (2,0,-2,-4)$

第9回練習問題

関数 $f(x,y) = x^3 + y^3 + 6xy$ の極値を求めよ．

第9回練習問題

関数 $f(x,y)=x^3+y^3+6xy$ の極値を求めよ．

解答

[1] 停留点を求める（配点5点）

停留点 (x,y) の方程式は　$f_x(x,y)=3x^2+6y=0, f_y(x,y)=3y^2+6x=0$，すなわち，

$$x^2+2y=0, \tag{1}$$

$$y^2+2x=0. \tag{2}$$

（方程式3点）

(1)より，$y=-\dfrac{x^2}{2}$ を(2)に代入して，

$$\frac{1}{4}x^4+2x=\frac{1}{4}x(x^3+8)=\frac{1}{4}x(x+2)(x^2-2x+4)=0.$$

最後の因子 $x^2-2x+4=0$ は実解を持たないので，$x=0,-2$．これより，$y=0,-2$．ゆえに，停留点は，

$$\underline{(x,y)=(0,0),(-2,-2)}\,.$$

（停留点各1点）

[2] 極値の判定（配点5点）

$$A=f_{xx}(x,y)=6x, B=f_{xy}(x,y)=6, C=f_{yy}(x,y)=6y\,.$$

（偏導関数1点）

（い）$(x,y)=(0,0)$ のとき，$A=0, B=6, C=0, D=AC-B^2=-36<0$ ゆえ，$(0,0)$ は鞍点.

（判定法があってれば結論を問わず1点）

（ろ）$(x,y)=(-2,-2)$ のとき，$A=-12<0, B=6, C=-12, D=AC-B^2=144-32=108>0$ ゆえ，$(-2,-2)$ は極大点．極大値は $f(-2,-2)=-8-8+24=8$．

（判定法があってれば結論を問わず1点）

以上より，$\underline{\text{極大値 } f(-2,-2)=8}$．

（正解に2点）