微積分学II第7回高次微係数

1．高次偏導関数（高階偏導関数）

関数 $f(x,y)$ を変数 x,y で複数回偏微分したもの．偏微分回数の合計が次数．

・高次偏導関数の書き方色々（後2つの記法は定理2が前提．定理2の下のコメント参照）

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}f\right)\right)\right)=f_{xxyx}=\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}=f^{(3,1)}\quad \text{は4次偏導関数.}$$

［例］ $f=\sin xy$ の　0次　1次　2次偏導関数.

$$\begin{array}{lll} & & f_{xx}=-y^2\sin xy \\ & f_x=y\cos xy & \\ f=\sin xy & & f_{xy}=f_{yx}=\cos xy-xy\sin xy \\ & f_y=x\cos xy & \\ & & f_{yy}=-x^2\sin xy \end{array}$$

・ $f(x,y)$ は C^n 級（シーエヌ級， n 回連続微分可能）⇔ 全ての n 次偏導関数が存在して連続．

（ C^0 級は単なる連続関数， C^∞ 級は任意の次数の全ての偏導関数が存在して連続．）

［定理1］ C^0 級 $\supset C^1$ 級 $\supset C^2$ 級 $\supset\cdots\supset C^n$ 級 $\supset C^{n+1}$ 級 $\supset\cdots\supset C^\infty$ 級．//

（証明） $n+1$ 次偏導関数が全て連続なら，それらの積分である n 次偏導関数は連続．//

［定理2］ C^∞ 級関数(普通の関数)の高階偏導関数は x,y に関する微分の順序によらない．//

・ $f_{xyxxy}=f_{xxxyy}=f^{(3,2)}$， $f_{\underbrace{x\cdots x}_{k}\underbrace{y\cdots y}_{l}}=f^{(k,l)}$ など， x,y に関する微分の回数で偏微分が表せる．

2．直線上の高次微係数

点 (a,b) からベクトル (α,β) 方向に動いたときの $f(x,y)$ の変化 $F(t)=f(a+\alpha t,b+\beta t)$ を考える．

$f^{(0,0)}=f(a+\alpha t,b+\beta t), f^{(i,j)}=f^{(i,j)}(x+\alpha t,y+\beta t)$ と略記して，合成関数の微分則より，

$$\frac{d}{dt}f^{(i,j)}=\alpha f^{(i+1,j)}+\beta f^{(i,j+1)}\ \ (i,j\geq 0)\,. \tag{1}$$

この公式から，

$$\begin{aligned} F(t)&=f^{(0,0)} \\ F'(t)&=\alpha f^{(1,0)}+\beta f^{(0,1)}, \\ F''(t)&=\alpha^2 f^{(2,0)}+2\alpha\beta f^{(1,1)}+\beta^2 f^{(0,2)}, \\ F^{(3)}(t)&=\alpha^3 f^{(3,0)}+3\alpha^2\beta f^{(2,1)}+3\alpha\beta^2 f^{(1,2)}+\beta^3 f^{(0,3)}. \end{aligned} \tag{2}$$

係数がパスカルの三角形と同じ原理で作られるので，一般には，

$$F^{(k)}(t)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\alpha^i\beta^{k-i}f^{(i,k-i)}f(a+\alpha t,b+\beta t) \tag{3}$$

$$=k!\sum_{i,j\geq 0,\,i+j=k}\frac{f^{(i,j)}(a+\alpha t,b+\beta t)}{i!\,j!}\alpha^i\beta^j\,. \qquad \left(\binom{k}{i}={}_kC_i \text{ は2項係数.}\right) \tag{4}$$

３．2変数テイラー展開

テイラー展開は点 (a,b) でのデータ $f^{(i,j)}(a,b)$ を使って $f(x,y)$ を表す公式．2節で， $\alpha=x-a,\beta=y-b$ として， $F(t)$ に1変数のテイラーの定理を用いると，

$$f(x,y)=f(a+\alpha,b+\beta)=F(1)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{F^{(k)}(0)}{k!}+\frac{F^{(n)}(\theta)}{n!}\quad(0<\theta<1).$$

これに，式(4)を代入して，つぎの2変数関数のテイラーの定理を得る．

―――― テイラーの定理 ――――

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i+j=k}\frac{f^{(i,j)}(a,b)}{i!\,j!}(x-a)^i(y-b)^j+R_n\\ R_n&=\sum_{i+j=n}\frac{f^{(i,j)}(a+\theta(x-a),b+\theta(y-b))}{i!\,j!}(x-a)^i(y-b)^j\quad(0<\theta<1).//\end{aligned}\tag{5}$$

$\sum\limits_{i+j=k}$ は $i+j=k$ となる非負整数 i,j の組全体の和． R_n は剰余項と呼ばれる．

［例］ $f(x,y)=e^{x+y}$ のマクローリン展開(原点 $(0,0)$ でのテイラー展開)を求める($n=3$)．

1) 高次偏導関数： $f^{(1,0)}(x,y)=e^{x+y},f^{(0,1)}(x,y)=e^{x+y},\cdots,f^{(0,3)}(x,y)=e^{x+y}$ ．

2) 偏導関数値　： $f^{(1,0)}(0,0)=f^{(0,1)}(0,0)=f^{(2,0)}(0,0)=f^{(1,1)}(0,0)=f^{(0,2)}(0,0)=1,$

$$f^{(3,0)}(\theta x,\theta y)=f^{(2,1)}(\theta x,\theta y)=f^{(1,2)}(\theta x,\theta y)=f^{(0,3)}(\theta x,\theta y)=e^{\theta(x+y)}.$$

3) マクローリン展開：
$$f(x,y)=\underbrace{\frac{f^{(0,0)}}{0!0!}}_{k=0}+\underbrace{\frac{f^{(1,0)}}{1!0!}x+\frac{f^{(0,1)}}{0!1!}y}_{k=1}+\underbrace{\frac{f^{(2,0)}}{2!0!}x^2+\frac{f^{(1,1)}}{1!1!}xy+\frac{f^{(0,2)}}{0!2!}y^2}_{k=2}+R_3$$

$$=1+x+y+\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2+R_3=1+(x+y)+\frac{1}{2}(x+y)^2+R_3.$$

$$\begin{aligned}R_3&=\frac{f^{(3,0)}(\theta x,\theta y)}{3!0!}x^3+\frac{f^{(2,1)}(\theta x,\theta y)}{2!1!}x^2y+\frac{f^{(1,2)}(\theta x,\theta y)}{1!2!}xy^2+\frac{f^{(0,3)}(\theta x,\theta y)}{0!3!}y^3\\&=\frac{e^{\theta(x+y)}}{6}+\frac{e^{\theta(x+y)}}{2}x^2y+\frac{e^{\theta(x+y)}}{2}xy^2+\frac{e^{\theta(x+y)}}{6}y^3=\frac{e^{\theta(x+y)}}{3!}(x+y)^3.//\end{aligned}$$

第7回練習問題

１． $f(x,y)=e^x\cos y$ の1次と2次の偏導関数を全て求めよ．

２． $f(x,y)=e^x\cos y$ のマクローリン展開を2次の項まで求めよ（3次剰余項 R_3 は求めない）．

$$f(x,y)=\underbrace{\frac{f^{(0,0)}}{0!0!}}_{k=0}+\underbrace{\frac{f^{(1,0)}}{1!0!}x+\frac{f^{(0,1)}}{0!1!}y}_{k=1}+\underbrace{\frac{f^{(2,0)}}{2!0!}x^2+\frac{f^{(1,1)}}{1!1!}xy+\frac{f^{(0,2)}}{0!2!}y^2}_{k=2}+R_3,\ f^{(i,j)}=f^{(i,j)}(0,0).$$

第7回練習問題

1．$f(x,y)=e^x\cos y$ の1次と2次の偏導関数を全て求めよ．

2．$f(x,y)=e^x\cos y$ のマクローリン展開を2次の項まで求めよ（3次剰余項 R_3 は求めない）．

$$f(x,y)=\underbrace{\frac{f^{(0,0)}}{0!0!}}_{k=0}+\underbrace{\frac{f^{(1,0)}}{1!0!}x+\frac{f^{(0,1)}}{0!1!}y}_{k=1}+\underbrace{\frac{f^{(2,0)}}{2!0!}x^2+\frac{f^{(1,1)}}{1!1!}xy+\frac{f^{(0,2)}}{0!2!}y^2}_{k=2}+R_3,\ f^{(i,j)}=f^{(i,j)}(0,0).$$

解答

1．（配点5点）

$f^{(1,0)}(x,y)=e^x\cos y,\ f^{(0,1)}(x,y)=-e^x\sin y,$

$f^{(2,0)}(x,y)=e^x\cos y,\ f^{(1,1)}(x,y)=-e^x\sin y,\ f^{(2,0)}(x,y)=-e^x\cos y$．（偏導関数各1点）

2．（配点5点）

2) $f^{(1,0)}(0,0)=1,\ f^{(0,1)}(0,0)=0,\ f^{(2,0)}(0,0)=1,\ f^{(1,1)}(0,0)=0,\ f^{(0,2)}(0,0)=-1$．（２点）

減点法：全部正解で2点．1個間違っていれば1点．2個以上間違っていると０点．

3)
$$f(x,y)=\underbrace{\frac{f^{(0,0)}}{0!0!}}_{k=0}+\underbrace{\frac{f^{(1,0)}}{1!0!}x+\frac{f^{(0,1)}}{0!1!}y}_{k=1}+\underbrace{\frac{f^{(2,0)}}{2!0!}x^2+\frac{f^{(1,1)}}{1!1!}xy+\frac{f^{(0,2)}}{0!2!}y^2}_{k=2}+R_3$$
$$=1+\frac{1}{1!0!}x+\frac{0}{0!1!}y+\frac{1}{2!0!}x^2+\frac{0}{1!1!}xy+\frac{-1}{0!2!}y^2+R_3=1+x+\frac{1}{2}(x^2-y^2)+R_3.$$
（3点）

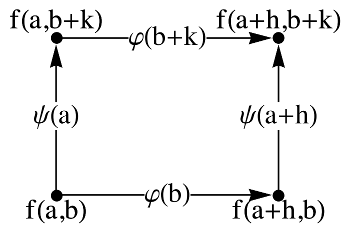
独立法：2)の数値が，3)で正しい位置に代入されていれば3)は正解とする．

＜ノート＞

1．定理2の証明

［定理2］C^∞ 級関数(普通の関数)の高階偏導関数は x,y に関する微分の順序によらない．//

証明には次の命題を用いる．



［命題1］関数 $f(x,y)$ が C^2 級なら，$f_{xy}=f_{yx}$．//

（証明）点 (a,b) で $f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$ を示す．x のみを $a\to a+h$ に変化させた変化量を $\varphi(y)=f(a+h,y)-f(a,y)$，$y$ のみを $b\to b+k$ に変化させた変化量を $\psi(x)=f(x,b+k)-f(x,b)$ とすると，

$$\begin{aligned}\varphi(b)+\psi(a+h)&=\big(f(a+h,b)-f(a,b)\big)+\big(f(a+h,b+k)-f(a+h,b)\big)\\&=\boxed{f(a+h,b+k)-f(a,b)}\\&=\big(f(a,b+k)-f(a,b)\big)+\big(f(a+h,b+k)-f(a,b+k)\big)=\psi(a)+\varphi(b+h).\end{aligned}$$

$$\therefore \psi(a+h)-\psi(a)=\varphi(b+k)-\varphi(b).\qquad\cdots①$$

①の左辺に平均値の定理を用いると，$0<\theta_1<1, 0<\theta_1'<1$ が存在して，次式が成立する．

$$\psi(a+h)-\psi(a)=\psi'(a+\theta_1h)h \qquad (x\text{ に関する平均値の定理})$$
$$=\{f_x(a+\theta_1h,b+k)-f_x(a+\theta_1h,b)\}h$$
$$=f_{xy}(a+\theta_1h,b+\theta_1'k)kh.\ \cdots② \qquad (y\text{ に関する平均値の定理})$$

同様にして，①の右辺についても，$0<\theta_2<1, 0<\theta_2'<1$ が存在して，

$$\varphi(b+k)-\varphi(b)=f_{yx}(a+\theta_2 h, b+\theta_2' k)hk. \qquad \cdots③$$

①に②と③を代入して，

$$f_{xy}(a+\theta_1 h, b+\theta_1' k)kh=f_{yx}(a+\theta_2 h, b+\theta_2' k)hk.$$

両辺を kh で割り，$k,h\to 0$ とすると f_{xy}, f_{yx} は連続ゆえ，$f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$．//

（定理2の証明）微分の順序によらず，f を x で k 回，y で l 回微分して得られる関数 g は

$$g=f_{\underbrace{x\cdots x}_{k}\underbrace{y\cdots y}_{l}} \tag{1}$$

となることを示せば十分である．さて，$g=f_{*\cdots *yx*\cdots *}$ とする．$*$ は変数 x,y のいずれかを表す．条件より，$g=f_{*\cdots *}$ も C^∞ 級だから，もちろん C^2 級である．ゆえに，命題1より，

$$g=f_{*\cdots *yx*\cdots *}=((f_{*\cdots *})_{yx})_{*\cdots *}=((f_{*\cdots *})_{xy})_{*\cdots *}=f_{*\cdots *xy*\cdots *}$$

となり，x,y の微分の順序は交換可能である．これを繰り返し用いて，全ての x を y の左に送れば（左の x から順に左側に揃えれば）(1)が得られる．//

点 (x,y) から θ 方向に動いたときの f の変化 $f(x+t\cos\theta, y+t\sin\theta)$ を考える．

2. 高次方向微係数： $f_\theta^{(k)}(x,y)=\dfrac{d^k}{dt^k}f(x+t\cos\theta, y+t\sin\theta)$ について，

$$f_\theta^{(n)}(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^k\theta\sin^{n-k}\theta f^{(k,n-k)}(x,y). \quad //$$