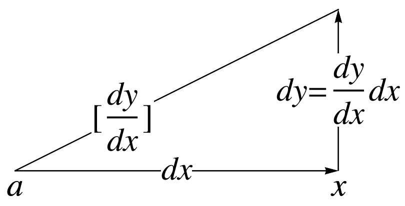
微積分学II第6回合成関数の微分

1．微小変化間の関係

○ 1変数関数



$y = f(x)$ に関するテーラーの定理より， a,x の内分点 c があって，

$$y = f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(c)(x-a)^2 .$$

$\Delta x = x-a, \Delta y = f(x) - f(a)$ と置くと，

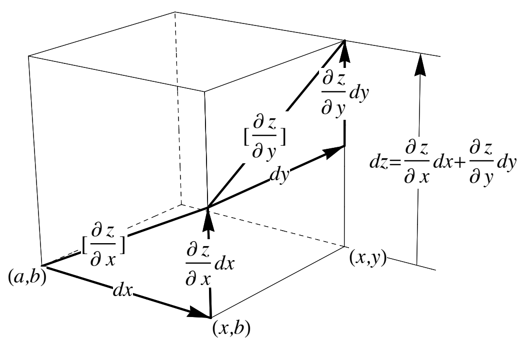
$f''(c)(x-a)^2 = f''(c)\Delta x^2 = o(\Delta x)$ ゆえ，変化量の関係は，

$$\Delta y = f(x) - f(a) = \frac{dy}{dx}\Delta x + o(\Delta x) .$$

$o(\Delta x)$ が無視できる微少な Δx を dx，それによる Δy を dy と書くと，

$$dy = \frac{dy}{dx}dx . \tag{1}$$

○ 2変数関数



前回の定理より $z = f(x,y)$ について，

$$f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + o(r),$$

$$\Delta x = x-a, \Delta y = y-b, r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

ここで， $\Delta z = f(x,y) - f(a,b)$ とすると，変化量の関係は，

$$\Delta z = f(x,y) - f(a,b) = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + o(r),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(a,b), \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(a,b).$$

$o(r)$ が無視できる微少な $\Delta x, \Delta y$ を dx,dy，それによる Δz を dz と書くと，

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy . \tag{2}$$

2．合成関数の微分

○ 合成関数 $z = F(t) = f(g(t),h(t))$

$x = g(t),\ y = h(t),\ z = f(x,y)$ と書くと，(1)より，

$$dx = \frac{dx}{dt}dt,\quad dy = \frac{dy}{dt}dt .$$

これらを(2)に代入して，

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}dt + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}dt = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)dt . \tag{3}$$

式は複雑，意味は簡単． t が z に影響を及ぼす経路は， $t \xrightarrow{g} x \xrightarrow{f} z$ と $t \xrightarrow{h} y \xrightarrow{f} z$ の2系統ある．第1の経路では微小変化 dt は $\frac{dx}{dt}$ 倍され dx となり，さらに $\frac{\partial z}{\partial x}$ 倍され dz に伝わる．すなわち， dt は $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}$ 倍されて dz に

伝わる．同様に，第2の経路では $\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$ されて dz に伝わる．その和が， dt の dz に対する影響である．

(3)の両辺を dt で割り，変化率を求めると．

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{4}$$

または，

$$F'(t)=f_x(x,y)g'(t)+f_y(x,y)h'(t)\ \ (x=g(t),\,y=h(t)).$$

○ グラディエント(ベクトル)： $\nabla f(x,y)=\left(f_x(x,y),\,f_y(x,y)\right)$ ＝最急勾配方向(最もきつい登坂方向)

$\nabla f=\left(p\cos\varphi,\,p\sin\varphi\right)$ と極座標表示すると，方向微係数 $f'_\theta=p\cos(\theta-\varphi)$ で $\theta=\varphi$ のとき最大値 p .

理由： $f'_\theta(x,y)=f_x\cos\theta+f_y\sin\theta=p(\cos\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta)=p\cos(\theta-\varphi)\le p$

であり， $\theta-\varphi=0$ で $f'_\theta(x,y)$ は最大値 p となる．

○ 合成関数 $z=F(u,v)=f(g(u,v),h(u,v))$

$x=g(u,v),\,y=h(u,v),\,z=f(x,y)$ と書く． v を定数， $g,\,h$ を u のみの関数と見なすと，(3)より，

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}. \tag{5}$$

または，

$$F_u(u,v)=f_x(x,y)g_u(u,v)+f_y(x,y)h_u(u,v)\quad (x=g(u,v),\,y=h(u,v)).$$

x,y の u に関する微分は， v を定数を見なした微分だから，偏微分 $\dfrac{\partial x}{\partial u},\dfrac{\partial y}{\partial u}$ である．

同じく， u を定数， $g,\,h$ を v のみ関数と見なすと，

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}, \tag{6}$$

または，

$$F_v(u,v)=f_x(x,y)g_v(u,v)+f_y(x,y)h_v(u,v)\quad (x=g(u,v),\,y=h(u,v)).$$

第6回練習問題

1． $z=\cos x\sin y,\,x=e^t,\,y=t^2$ のとき，公式(4)により $\dfrac{dz}{dt}$ を求め， t で表せ．

2． $z=e^{x+y},\,x=\sin uv,\,y=\cos uv$ のとき，公式(5), (6)により $\dfrac{\partial z}{\partial u},\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求め $u,\,v$ で表せ．

両問とも，公式を使わない解答は不可．

第6回練習問題

１． $z=\cos x\sin y, x=e^t, y=t^2$ のとき，公式(4)により $\dfrac{dz}{dt}$ を求め， t で表せ．

２． $z=e^{x+y}, x=\sin uv, y=\cos uv$ のとき，公式(5), (6)により $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求め u, v で表せ．

両問とも，公式を使わない解答は不可．

解答

１． $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\sin x\sin y$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\cos x\cos y$， $\dfrac{dx}{dt}=e^t$， $\dfrac{dy}{dt}=2t$ （配点2） より，

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=(-\sin x\sin y)e^t+(\cos x\cos y)2t \quad （配点２）$$
$$=-e^t\sin e^t\sin t^2+2t\cos e^t\cos t^2.$$

合計4点から減点法．ミス１個減点１．

２． $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{x+y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{x+y}$, $\dfrac{\partial x}{\partial u}=v\cos uv$, $\dfrac{\partial y}{\partial u}=-v\sin uv$, $\dfrac{\partial x}{\partial v}=u\cos uv$, $\dfrac{\partial y}{\partial v}=-u\sin uv$ （配点2） より，

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=e^{x+y}(v\cos uv)+e^{x+y}(-v\sin uv)=v(\cos uv-\sin uv)e^{\sin uv+\cos uv}, \quad （配点2）$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=e^{x+y}(u\cos uv)+e^{x+y}(-u\sin uv)=u(\cos uv-\sin uv)e^{\sin uv+\cos uv}. \quad （配点2）$$

合計6点から減点法．ミス１個減点１．

両問とも公式を使わない(一変数関数の合成関数の微分則による)解答

$z=e^{x+y}=e^{\sin uv+\cos uv}$ として， $\dfrac{\partial z}{\partial u}=(v\cos uv-v\sin uv)e^{\sin uv+\cos uv}=v(\cos uv-\sin uv)e^{\sin uv+\cos uv}$

などは１点（参加賞！）．