微積分学II第5回偏微分・接平面

1．方向微係数・偏微係数（偏導関数）

2変数関数 $z=f(x,y)=f(\boldsymbol{p})$, $\boldsymbol{p}=(x,y)$, では，（ $\boldsymbol{p}$ の動く距離）に対する（関数 $f(\boldsymbol{p})$ の変化率）は， $\boldsymbol{p}$ が動く方向に依存する．（曲面の勾配は方向によって違う．）

・**θ 方向微係数** $f'_\theta(\boldsymbol{p})=\lim_{r\to 0}\dfrac{f(\boldsymbol{p}+r(\cos\theta,\sin\theta))-f(\boldsymbol{p})}{r}=\lim_{r\to 0}\dfrac{f(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)-f(x,y)}{r}$.

＜簡単に計算できる方向＞

・$\theta=0$ ： **x 偏導関数** $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=f_x(x,y)=\lim_{r\to 0}\dfrac{f(x+r,y)-f(x,y)}{r}\quad =f'_0(x,y)$.

$f(x,y)$ を x のみの関数とみなして x で微分（ y は定数とみなす）．

・$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ： **y 偏導関数** $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=f_y(x,y)=\lim_{r\to 0}\dfrac{f(x,y+r)-f(x,y)}{r}\quad =f'_{\pi/2}(x,y)$.

$f(x,y)$ を y のみの関数とみなして y で微分（ x は定数とみなす）．

［例１］

・$f(x,y)=x^2+y^3$.　$f_x(x,y)=\boxed{2x}+\boxed{0}=2x,\ f_y(x,y)=\boxed{0}+\boxed{3y^2}=3y^2.$

・$f(x,y)=\sin x\cos y$.　$f_x(x,y)=\boxed{\cos x}\cos y,\ f_y(x,y)=(\sin x)(\boxed{-\sin y})=-\sin x\sin y.$

・$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.　$f_x(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f_y(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.　$\left(\because \dfrac{d}{dx}\sqrt{x^2+a^2}=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$

2．方向偏導関数の計算

［**定理1**］ $f_x(x,y), f_y(x,y)$ が連続なら，

$$f'_\theta(x,y)=f_x(x,y)\cos\theta+f_y(x,y)\sin\theta\ .\quad //$$

＜オーダー記号＞

△ $\lim_{r\to 0}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$ なら， $\alpha=o(\beta)\ (r\to 0)$ と書き，「 $r\to 0$ のとき， α は**スモール・オーダー β**」と言う．

雰囲気： r を小さくすると， α は β に比べて極めて小さくなる．

［例］・微分可能： $\lim_{r\to 0}\left\{\dfrac{f(x+r)-f(x)}{r}-f'(x)\right\}=0 \Leftrightarrow \lim_{r\to 0}\dfrac{f(x+r)-f(x)-f'(x)r}{r}=0$

$$\Leftrightarrow f(x+r)-f(x)-f'(x)r=o(r) \Leftrightarrow \underbrace{\boxed{f(x+r)=f(x)+f'(x)r+o(r)\ \ (r\to 0)}}_{\text{微分可能はこう表せる}} \tag{1}$$

・連続： $c=\cos\theta, s=\sin\theta$ で， $\lim_{r\to 0}f(x+rc,y+rs)-f(x,y)=0 \Leftrightarrow \lim_{r\to 0}\dfrac{f(x+rc,y+rs)-f(x,y)}{1}=0$

$$\Leftrightarrow f(x+rc,y+rs)-f(x,y)=o(1) \Leftrightarrow \underbrace{\boxed{f(x+rc,y+rs)=f(x,y)+o(1)\ \ (r\to 0)}}_{\text{連続はこう表せる}} \tag{2}$$

（定理1の証明）簡単のため， $c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$ と書く． x に関する平均値の定理より，

$$f(x+rc,y+rs)-f(x,y+rs)=f_x(x+\alpha rc,y+rs)rc\quad (0<\alpha<1)\ .$$

$f_x(x,y)$ は連続なので，(2)より， $f_x(x+\alpha rc,y+rs)=f_x(x,y)+o(1)$ と書き，

$$f(x+rc,y+rs)-f(x,y+rs)=\big(f_x(x,y)+o(1)\big)rc\ . \tag{3}$$

同じことを，y について行うと，

$$f(x,y+rs)-f(x,y)=\big(f_y(x,y)+o(1)\big)rs\,. \tag{4}$$

(3), (4)を加えて整理すると，$o(1)rc+o(1)rs=o(r)$ が簡単に示せるので，

$$f(x+rc,y+rs)-f(x,y)-f_x(x,y)rc-f_y(x,y)rs=o(1)rc+o(1)rs=o(r)\,. \tag{5}$$

ゆえに，

$$\lim_{r\to 0}\left\{\frac{f(x+rc,y+rs)-f(x,y)}{r}-\big(f_x(x,y)c+f_y(x,y)s\big)\right\}$$
$$=\lim_{r\to 0}\frac{f(x+rc,y+rs)-f(x,y)-f_x(x,y)rc+f_y(x,y)rs}{r}=\lim_{r\to 0}\frac{o(r)}{r}=0$$

よって，

$$f'_\theta(x,y)=\lim_{r\to 0}\frac{f(x+rc,y+rs)-f(x,y)}{r}=f_x(x,y)c+f_y(x,y)s\,.$$

［**定理**2］($f(x,y)$ の (a,b) 近傍での一次近似) $f_x(x,y), f_y(x,y)$ が連続なら，

$$f(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+o(r),\quad r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\ .\ // \tag{6}$$

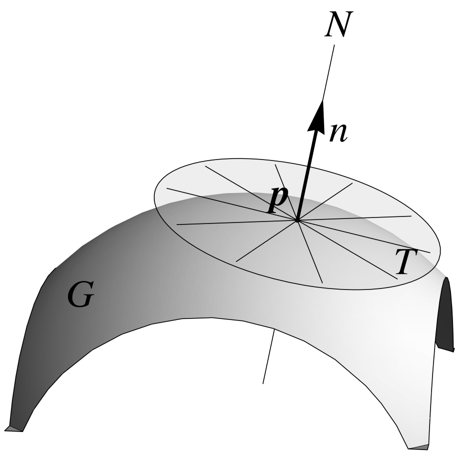
（証明）(5)で $(x,y)=(a,b)$ とすると，$f(a+rc,b+rs)=f(a,b)+f_x(a,b)rc+f_y(a,b)rs+o(r)$．ここで，$x=a+rc, y=b+rs$ とすれば，$rc=x-a, rs=y-b, r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$．ゆえに，(6)を得る．

3．接平面と法線

曲面 $G:z=f(x,y)$ 上の点を $\boldsymbol{p}=(a,b,c), c=f(a,b)$ とし，$A=f_x(a,b)$, $B=f_y(a,b), \boldsymbol{n}=(-A,-B,1)$ とする．

△ 点 $\boldsymbol{p}$ における G の**接平面** T ： $z=c+A(x-a)+B(y-b)$ $\big(=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)\big)$．

☆ 接平面は点 $\boldsymbol{p}$ における G の接線の集まり(右図).



△ 点 $\boldsymbol{p}$ における G の**法線** N ： $\boldsymbol{p}$ を通り T と直交する直線.

- ・法線のパラメタ表示：$(x,y,z)=\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{n}$ $(-\infty<t<\infty)$．
- ・ $\boldsymbol{n}$ を**法線ベクトル**と言う($\boldsymbol{n}$ は T と直交).
- ・法線の方程式：$\dfrac{x-a}{A}=\dfrac{y-b}{B}=-(z-c)$．

第5回練習問題

1．(p.105 15.4(2))：曲面 $G:z=f(x,y)=\dfrac{abc}{xy}$ と曲面上の点 $\boldsymbol{p}=(a,b,c)$ を考える.

(1) $\boldsymbol{p}$ が G 上にあることを示す式を書け.

(2) 偏導関数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ を求めよ.

(3) 偏微係数 $f_x(a,b), f_y(a,b)$ を求めよ.

(4) $\boldsymbol{p}$ における G の接平面 T を求めよ（方程式を書け）.

(5) $\boldsymbol{p}$ における G の法線 N を求めよ（パラメタ表示を書け）.

第5回練習問題

1．(p.105 15.4(2))：曲面 $G: z = f(x,y) = \dfrac{abc}{xy}$ と曲面上の点 $\boldsymbol{p} = (a,b,c)$ を考える．

(1) $\boldsymbol{p}$ が G 上にあることを示す式を書け．

(2) 偏導関数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ を求めよ．

(3) 偏微係数 $f_x(a,b), f_y(a,b)$ を求めよ．

(4) $\boldsymbol{p}$ における G の接平面 T を求めよ（方程式を書け）．

(5) $\boldsymbol{p}$ における G の法線 N を求めよ（パラメタ表示を書け）．

解答

1．(1)（配点2点）

$f(a,b) = \dfrac{abc}{ab} = c$． ゆえに，$(a,b,c)$ は曲面上にある．

(2) （配点2点）

$$f_x(x,y) = -\frac{abc}{x^2 y},\ f_y(x,y) = -\frac{abc}{xy^2}$$

(3) （配点2点）

$$f_x(a,b) = -\frac{c}{a},\ f_y(a,b) = -\frac{c}{b}$$

(4)（配点2点）

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) = c - \frac{c}{a}(x-a) - \frac{c}{b}(y-b).$$

ここまでで十分．後の変形は自由．

$$z = -\frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y + 3c = -c\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 3\right) = -\frac{c}{ab}(bx + ay - 3ab).$$

(5)（配点2点）

$N: (x,y,z) = (a,b,c) + t\left(\dfrac{c}{a}, \dfrac{c}{b}, 1\right)\ \ (-\infty < t < \infty)$．

あるいは，

$N: (x,y,z) = (a,b,c) + t(bc, ca, ab)\ \ (-\infty < t < \infty)$．

t の係数ベクトルは定数倍してよいので，色々書ける．$(-\infty < t < \infty)$ が無いと減点1．