微積分学II第4回多変数関数の基礎概念

微積分学IIでは，2変数関数 $z=f(x,y)$ を扱う． $D\subset\mathbb{R}^2$ は領域とする．

1．基礎概念

・関数の書き方： $z=f(x,y),(x,y)\in D$ ．または， $\boldsymbol{x}=(x,y)$ として， $z=f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in D$ ．

・関数のグラフ：3次元空間の集合 $G=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D, z=f(x,y)\}$ のこと．

・関数の等高線：2次元平面の集合 $C_c=\{(x,y)\in D\,|\,f(x,y)=c\}$ のこと． c を等高値という．

・2次元平面の2点 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ 間の距離： $\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$ ．

2．関数の極限

点 $\boldsymbol{x}=(x,y)$ が点 $\boldsymbol{a}=(a,b)$ に近づくときの関数 $f(\boldsymbol{x})$ の極限 c ．

・書き方： $c=\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ または， $c=\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})$ ．

・意味： $\lim\limits_{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|\to 0}\big(f(\boldsymbol{x})-c\big)=0$ ． $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{a}$ の距離が0に近づくと， $f(\boldsymbol{x})$ と c の差が0に近づく．

——☆1　極限の証明法(囲み打ち)——

$M(r)\ge\left|f\big(\boldsymbol{a}+r(\cos\theta,\sin\theta)\big)-c\right|\ (0\le\theta<2\pi)$ となる $M(r)$ をみつけ， $\lim\limits_{r\to 0}M(r)=0$ を示す．

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+r(\cos\theta,\sin\theta)=(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)$ は $\boldsymbol{a}$ からの距離が r で方向が θ の点．

［例1］ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$ を示せ．

上の証明法で， $\boldsymbol{a}=(0,0),c=0$ とすると， $\boldsymbol{a}+r(\cos\theta,\sin\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ だから，

$$f\big(\boldsymbol{a}+r(\cos\theta,\sin\theta)\big)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)=(r\cos\theta)\cos\frac{1}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=r\cos\theta\cos\frac{1}{r^2}.$$

$$\therefore\left|f\big(\boldsymbol{a}+r(\cos\theta,\sin\theta)\big)\right|=\left|(r\cos\theta)\cos\frac{1}{r^2}\right|=r|\cos\theta|\cdot\left|\cos\frac{1}{r^2}\right|\underset{|\cos|\le 1}{\le}\overbrace{r}^{M(r)}\to 0\quad(r\to 0).$$

ゆえに， $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$ ． //

○極限の性質（1変数関数と同じ）

——☆2　四則——

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\big(f(\boldsymbol{x})\pm g(\boldsymbol{x})\big)=\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})\pm\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}g(\boldsymbol{x}),$$

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})=\left(\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})\right)\left(\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}g(\boldsymbol{x})\right),$$

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})/g(\boldsymbol{x})=\left(\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})\right)\Big/\left(\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}g(\boldsymbol{x})\right)\quad（ただし，\ \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}g(\boldsymbol{x})\ne 0）.$$

――☆3　合成関数――――

$\lim_{x\to a} g(x)=c,\ \lim_{x\to a} h(x)=d$ なら， $\lim_{x\to a} f(g(x),h(x))=\lim_{y\to(c,d)} f(y)$.

――――――――――

３．関数の連続性

・点 $a=(a,b)$ で関数 $f(x)=f(x,y)$ が連続　⇔　$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

○連続性の性質（極限の性質より）

――☆4　実質1変数連続――――

$h(x)$ が連続な1変数関数なら， $f(x,y)=h(x)$ も $g(x,y)=h(y)$ も連続な2変数関数.

――――――――――

［例2］ $f(x,y)=\sin x,\cos y, e^x, x^2, y^2$ は実質1変数連続関数だから2変数関数としても連続．同様に，

$f(x,y)=\dfrac{1}{x}$ は， y 軸 $(x=0)$ を除いて連続2変数関数． $f(x,y)=\log y$ は $y>0$ の範囲で連続2変数関数.

――☆5　四則――――

$f(x), g(x)$ が連続なら， $f(x)\pm g(x), f(x)g(x), f(x)/g(x)$ も連続．ただし，除算では $g(x)=0$ となる x は除外(そもそも演算が定義されない).

――――――――――

［例3］ $f(x,y)=\sin x+\cos y, x^2+y^2$ は連続関数の四則だから連続．同様に， $f(x,y)=e^y+\dfrac{1}{x}$ は y 軸 $(x=0)$ を除いて連続.

――☆6　合成関数――

$f(x), g(x), h(x)$ が連続なら， $f(g(x),h(x))$ も連続．ただし，演算が定義されない x は除外.

――――――――――

［例4］ $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$ は連続関数の合成関数だから連続．同様に， $f(x,y)=\sin\left(e^y+\dfrac{1}{x}\right)$ は y 軸 $(x=0)$ を除いて連続.

＜以上の例より，「普通」の関数は計算が定義されているところでは連続である．＞

第4回練習問題

１． $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq 0,\\ 0 & (x,y)=0\end{cases}$ が任意の点 (x,y) で連続であることを2つに場合分けして示す.

(1) $(x,y)=(0,0)$ で， $f(x,y)$ が連続となることを示せ.

（２節☆1）

(2) $(x,y)\neq(0,0)$ で， $f(x,y)$ が連続となることを示せ.

（３節☆4，☆5）

第4回練習問題

1． $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq 0,\\ 0 & (x,y)=0\end{cases}$ が任意の点 (x,y) で連続であることを2つに場合分けして示す．

(1) $(x,y)=(0,0)$ で，$f(x,y)$ が連続となることを示せ．

（２節☆1）

(2) $(x,y)\neq(0,0)$ で，$f(x,y)$ が連続となることを示せ．

（３節☆4，☆5）

解答

1．(1)（配点５点）

☆1より，$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{0})=0$ を示せばよい．$\boldsymbol{x}=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ と置いて，

$$f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\frac{r^3\cos^3\theta-r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=\frac{r^3\cos^3\theta-r^3\sin^3\theta}{r^2}=r(\cos^3\theta-\sin^3\theta).$$

（ここまで出来れば2点）

ゆえに，

$$|f(r\cos\theta,r\sin\theta)|=\left|r(\cos^3\theta-\sin^3\theta)\right|=r\left|\cos^3\theta-\sin^3\theta\right|\leq r\left(\left|\cos^3\theta\right|+\left|\sin^3\theta\right|\right)\leq 2r\,. \qquad \text{(a)}$$

（ここまで出来れば4点）

また，（$M(r)=2r$ として，）$\lim_{r\to 0} 2r=0$ だから，$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{0})=0$．よって，$f(x,y)$ は点 $(x,y)=(0,0)$ で連続となる．

（ここまで出来れば5点）

（下のように簡単に書いてもよい）

$$\begin{aligned}|f(r\cos\theta,r\sin\theta)|&=\left|\frac{r^3\cos^3\theta-r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}\right|=\left|\frac{r^3\cos^3\theta-r^3\sin^3\theta}{r^2}\right|\\&=r\left|\cos^3\theta-\sin^3\theta\right|\leq r\left(\left|\cos^3\theta\right|+\left|\sin^3\theta\right|\right)\leq 2r\xrightarrow{r\to 0}0.\end{aligned}$$

よって，$f(x,y)$ は点 $(x,y)=(0,0)$ で連続となる．

注：$\left|\cos^3\theta-\sin^3\theta\right|\leq 1$ を証明して，不等式(a)を $|f(r\cos\theta,r\sin\theta)|=\left|r(\cos^3\theta-\sin^3\theta)\right|=r\left|\cos^3\theta-\sin^3\theta\right|\leq r$ と改良できる．しかし，結論は変わらないので，(a)で十分である．牛刀割鶏．

$\left|\cos^3\theta-\sin^3\theta\right|\leq 1$ の証明自体は面白いので次ページに掲載する．

(2)（配点５点）

☆4より，x^2,x^3,y^2,y^3 は2変数 x,y の関数として連続．（これ3点）

$f(x,y)$ は x^2,x^3,y^2,y^3 の四則演算からなり，$(x,y)\neq(0,0)$ なら，分母 $x^2+y^2\neq 0$ ゆえ，☆5より連続関数である．（この部分2点）

☆ $0 \le \theta \le 2\pi$ で $\left|\cos^3\theta - \sin^3\theta\right| \le 1$．

（証明） $c = \cos\theta,\ s = \sin\theta,\ d = \cos\theta - \sin\theta$ と置く． $c^2 + s^2 = 1$ より，

$$d^2 = (c-s)^2 = c^2 - 2cs + s^2 = 1 - 2cs. \qquad \therefore cs = \frac{1-d^2}{2}.$$

これより，

$$c^3 - s^3 = (c-s)(c^2 + cs + s^2) = (c-s)(1+cs) = d\left(1 + \frac{1-d^2}{2}\right) = \frac{1}{2}d(3-d^2).$$

ここで,

$$f(d) = \frac{1}{2}d(3-d^2) = c^3 - s^3$$

と置くと， $d = \cos\theta - \sin\theta = -\sqrt{2}\sin(\theta - \pi/4),\ 0 \le \theta \le 2\pi$ より， $-\sqrt{2} \le d \le \sqrt{2}$．また，

$$f'(d) = \frac{3}{2}(1-d^2) = 0$$

を解くと， $d = \pm 1$．これらより， $f(d)$ の増減表は

d	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(d)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(d)$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ゆえに， $1 \le f(d) \le 1 \ \Rightarrow\ \left|f(d)\right| \le 1$ である．//