微積分学II 第3回 微分方程式3

6．定係数2階斉次線形方程式の解公式

定係数２階の斉次線形方程式

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0 \tag{6.1}$$

に対し，

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{6.2}$$

を**特性方程式**，その2つの解 λ_1, λ_2 を**特性解**という．微分方程式(6.1)の一般解 $x(t)$ は特性解により次のように表される．特性方程式の判別式を $D = a^2 - 4b$ とする．

＜解公式＞

（１）相異なる2実解 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき($D > 0$),

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}), \tag{6.3}$$

（２）重解 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ のとき($D = 0$),

$$x(t) = Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t} = (A + Bt)e^{\lambda t} \quad (A, B \text{ は任意定数}), \tag{6.4}$$

（３）共役２虚解 $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ のとき($D < 0$),

$$x(t) = Ae^{\alpha t}\cos\beta t + Be^{\alpha t}\sin\beta t = e^{\alpha t}\left(A\cos\beta t + B\sin\beta t\right) \quad (A, B \text{ は任意定数}). \tag{6.5}$$

すなわち，一般解は特性方程式の判別式の符号により，上記の3つの形式に分かれる．

一般解は，いずれの形式においても2つの任意定数を持つ．だから，それらを具体的に決定する初期条件は2つの条件式

$$x(t_0) = p, x'(t_0) = q \tag{6.6}$$

からなる．これは，特定の時刻 $t = t_0$ における位置 $x(t_0) = p$ と速度 $x'(t_0) = q$ を指定するものである．

［例1］ 先週の質量 $m = 1$ バネ振り子の方程式(5.5)で抵抗係数 $r = 4$ ，バネ定数 $k = 3$ とすると，

$$x''(t) + 4x'(t) + 3x(t) = 0\ . \tag{6.7}$$

(1) 特性方程式： $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0$.

(2) 特性解は，相異なる2実解 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$.

(3) 一般解(式(6.3))： $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$ （ C_1, C_2 は任意定数). (6.8)

(4) 導関数： $x'(t) = -C_1 e^{-t} - 3C_2 e^{-3t}$ （(6.8)を微分したもの）． (6.9)

(5) 初期条件により， C_1, C_2 を決定：初期条件は

$$x(0) = 1, x'(0) = 0 \tag{6.10}$$

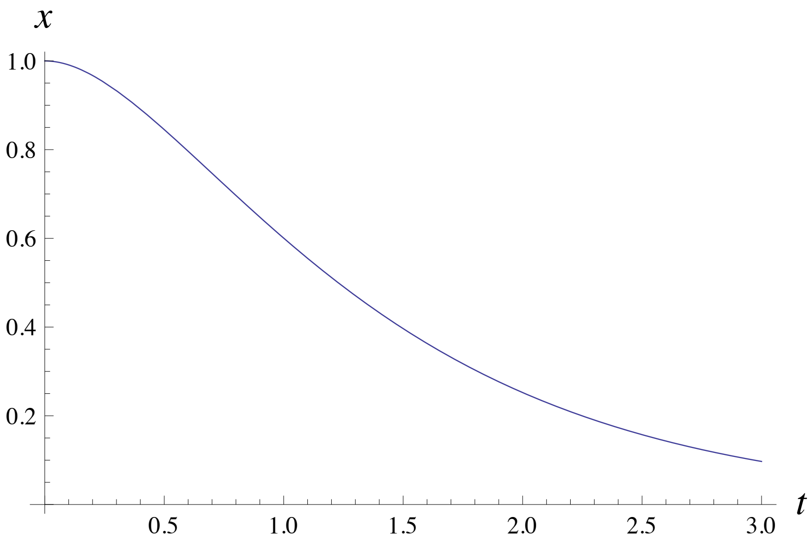
とする． $x(t)$ は，時刻 $t = 0$ で位置 $x(0) = 1$ ，速度 $x'(0) = 0$ の振り子の運動を表す．さて，(6.8), (6.9)に $t = 0$ を代入すると(6.10)より， C_1, C_2 に関する連立方程式

$$x(0) = C_1e^{-0} + C_2e^{-0} = C_1 + C_2 = 1,$$
$$x'(0) = -C_1e^{-0} - 3C_2e^{-0} = -C_1 - 3C_2 = 0 \tag{6.11}$$

が導かれる．これを解いて，$C_1 = \dfrac{3}{2}, C_2 = -\dfrac{1}{2}$．ゆえに，これらを一般解(6.8)に代入して，解は

$$x(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \tag{6.12}$$

である．グラフは下図のようになり，初期条件(6.10)が満たされていることが分かる．



［例2］ 抵抗係数 $r = 4$ のままで，バネ定数 $k = 4$ のとすると，

$$x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 0 \, . \tag{6.13}$$

(1) 特性方程式：$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0$．

(2) 特性解：重解 $\lambda = -2$．

(3) 一般解(式(6.4))：$x(t) = (A + Bt)e^{-2t}$　(A, B は任意定数).

(4) 導関数：$x'(t) = Be^{-2t} - 2(A + Bt)e^{-2t} = (B - 2A - 2Bt)e^{-t}$．

(5) 初期条件により，A, B を決定：初期条件を再び(6.10)とすると，

$$\begin{cases} x(0) = A = 1, \\ x'(0) = B - 2A = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = 2. \end{cases}$$

ゆえ，解は

$$x(t) = (1 + 2t)e^{-2t} \tag{6.14}$$

である．

［例3］ 抵抗係数 $r = 4$ のままで，バネ定数 $k = 5$ のとすると，

$$x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = 0 \, . \tag{6.15}$$

(1) 特性方程式：$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$．

(2) 特性解：2虚解 $\lambda = \alpha + i\beta = -2 \pm i$．ゆえに，$\alpha = -2, \beta = 1$．

(3) 一般解（式(6.5)）： $x(t)=e^{-2t}(A\cos t+B\sin t)$　（A,B は任意定数).

(4) 導関数： $x'(t)=-2e^{-2t}(A\cos t+B\sin t)+e^{-2t}(-A\sin t+B\cos t)=e^{-2t}\{(B-2A)\cos t-(A+2B)\sin t\}$.

(5) 初期条件により， A,B を決定：初期条件をここでも(6.10)とすると，

$$\begin{cases} x(0)=A=1, \\ x'(0)=B-2A=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=2. \end{cases} \tag{6.16}$$

よって，解は

$$x(t)=e^{-2t}(\cos t+2\sin t) \tag{6.15}$$

である．

7．解公式の導出

特性方程式(6.2)の2解を λ_1,λ_2 とする．解と係数の関係

$$\lambda_1+\lambda_2=-a,\ \ \lambda_1\lambda_2=b \tag{7.1}$$

が成り立っている．さて，

$$y(t)=x'(t)-\lambda_1 x(t) \tag{7.2}$$

と置くと，(7.1)より， $y(t)$ に関する微分方程式

$$\begin{aligned} y'(t)-\lambda_2 y(t) &= (x''(t)-\lambda_1 x'(t))-\lambda_2(x'(t)-\lambda_1 x(t)) \\ &= x''(t)-(\lambda_1+\lambda_2)x'(t)+\lambda_1\lambda_2 x(t)=x''(t)+ax'(t)+bx(t)=0 \end{aligned} \tag{7.3}$$

を得る．すなわち $y'(t)=\lambda_2 y(t)$ ゆえ，一般解は，(2.10)より，

$$y(t)=Ce^{\lambda_2 t} \quad (C\text{ は任意定数}) \tag{7.4}$$

である．これを，(7.2)に代入すれば， $x(t)$ に関する微分方程式

$$x'(t)=\lambda_1 x(t)+C_2 e^{\lambda_2 t} \tag{7.5}$$

を得る．この一般解は，(3.4)より，

$$x(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+e^{\lambda_1 t}\int e^{-\lambda_1 t}Ce^{\lambda_2 t}\,dt=C_1e^{\lambda_1 t}+Ce^{\lambda_1 t}\int e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\,dt \quad (C_1,C\text{ は任意定数}) \tag{7.6}$$

である．

（1）2実解 $\lambda_1\neq\lambda_2$ のとき， $\lambda_2-\lambda_1\neq 0$ ゆえ，

$$x(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+Ce^{\lambda_1 t}\int e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\,dt=C_1e^{\lambda_1 t}+\frac{C}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_1 t}e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}=C_1e^{\lambda_1 t}+\frac{C}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_2 t}. \tag{7.7}$$

$C_2=C/(\lambda_2-\lambda_1)$ と置けば，式(6.3)を得る．

（2）重解 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ のとき，

$$x(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+ce^{\lambda_1 t}\int 1\,dt=C_1e^{\lambda t}+Ce^{\lambda t}t=(C_1+Ct)e^{\lambda t}.$$

$A=C_1, B=C$ と置けば，式(6.4)を得る．

（3）共役2虚解$\lambda_1=\alpha+i\beta,\ \lambda_2=\alpha-i\beta$のとき．$\lambda_1\neq\lambda_2$であるから，（1）と同様の議論が成立する．そのためには，複素係数$\lambda=\alpha+i\beta$の指数関数$e^{\lambda t}$を微積分公式

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t}=\lambda e^{\lambda t},\ \int e^{\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}+C \tag{7.8}$$

が成立するように巧く定義する必要がある．そこで，

$$e^{\lambda t}=e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t) \tag{7.9}$$

とする．不定積分は微分の逆だから，(7.8)の微分公式だけ示すと，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{\lambda t}&=\alpha e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)+e^{\alpha t}(-\beta\sin\beta t+i\beta\cos\beta t)\\&=\alpha e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)+i\beta e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)\\&=(\alpha+i\beta)e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)=\lambda e^{\lambda t}.\end{aligned} \tag{7.10}$$

これにより，(7.1)〜(7.7)から，(6.3)までの議論が正当化され，一般解

$$x(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}=C_1e^{(\alpha+i\beta)t}+C_2e^{(\alpha-i\beta)t}\quad(C_1,C_2\text{ は任意の複素定数}), \tag{7.11}$$

を得る．これと(7.9)より，

$$\begin{aligned}x(t)&=C_1e^{(\alpha+i\beta)t}+C_2e^{(\alpha-i\beta)t}\\&=C_1e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)+C_2e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t)\\&=e^{\alpha t}\left\{(C_1+C_2)\cos\beta t+i(C_1-C_2)\sin\beta t\right\}.\end{aligned}$$

$A=C_1+C_2,B=i(C_1-C_2)$と置けば，

$$x(t)=e^{\alpha t}\left(A\cos\beta t+B\sin\beta t\right).$$

さて，$x(t)$は実数値をとる関数と考えているので，A,Bは実数である．実際，$t=0,\pi/(2\beta)$を代入すると，$x(0)=A,x(\pi/(2\beta))=Be^{\alpha\pi/(2\beta)}$より，$A=x(0),B=x(\pi/(2\beta))e^{-\alpha\pi/(2\beta)}$は実数である．

第3回練習問題

1．次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $x''(t)-x'(t)-2x(t)=0$　　(2) $x''(t)+3x'(t)+2x(t)=0$

(3) $x''(t)-4x'(t)+4x(t)=0$　　(4) $x''(t)+2x'(t)+x(t)=0$

(5) $x''(t)-x'(t)+x(t)=0$　　(6) $x''(t)+2x'(t)+2x(t)=0$

2．次の初期値問題を解け．

(1) $x''(t)-x'(t)-2x(t)=0,x(0)=0,x'(0)=3$　　(2) $x''(t)+3x'(t)+2x(t)=0,x(0)=2,x'(0)=-3$

(3) $x''(t)-4x'(t)+4x(t)=0,x(0)=1,x'(0)=1$　　(4) $x''(t)+2x'(t)+x(t)=0,x(0)=1,x'(0)=1$

(5) $x''(t)-x'(t)+x(t)=0,x(0)=0,x'(0)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(6) $x''(t)+2x'(t)+2x(t)=0,x(0)=1,x'(0)=0$

第3回練習問題

1．次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $x''(t)-x'(t)-2x(t)=0$　(2) $x''(t)+3x'(t)+2x(t)=0$

(3) $x''(t)-4x'(t)+4x(t)=0$　(4) $x''(t)+2x'(t)+x(t)=0$

(5) $x''(t)-x'(t)+x(t)=0$　(6) $x''(t)+2x'(t)+2x(t)=0$

2．次の初期値問題を解け．

(1) $x''(t)-x'(t)-2x(t)=0, x(0)=0, x'(0)=3$　(2) $x''(t)+3x'(t)+2x(t)=0, x(0)=2, x'(0)=-3$

(3) $x''(t)-4x'(t)+4x(t)=0, x(0)=1, x'(0)=1$　(4) $x''(t)+2x'(t)+x(t)=0, x(0)=1, x'(0)=1$

(5) $x''(t)-x'(t)+x(t)=0, x(0)=0, x'(0)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(6) $x''(t)+2x'(t)+2x(t)=0, x(0)=1, x'(0)=0$

解答

問1．問2と同じ方程式なので省略．問2で一般解を求めるまでが解となる．

問2．演習では(1)3点, (3)3点, (6)4点を実施．

(1) 配点3点

特性方程式と特性解：$\lambda^2-\lambda-2=(\lambda+1)(\lambda-2)=0$．$\lambda=-1,\ 2$．2実解．

一般解：$x(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}$．（1点）

導関数：$x'(t)=-C_1e^{-t}+2C_2e^{2t}$．

初期条件：$\begin{cases} x(0)=C_1+C_2=0, \\ x'(0)=-C_1+2C_2=3 \end{cases} \Rightarrow C_1=-1, C_2=1$．（方程式1点．解は問わない）

初期値問題の解：$x(t)=-e^{-t}+e^{2t}$．（1点）

(2) 配点3点

特性方程式と特性解：$\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda+2)=0$．$\lambda=-1,\ -2$．2実解．

一般解：$x(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$．（1点）

導関数：$x'(t)=-C_1e^{-t}-2C_2e^{-2t}$．

初期条件：$\begin{cases} x(0)=C_1+C_2=2, \\ x'(0)=-C_1-2C_2=-3 \end{cases} \Rightarrow C_1=1, C_2=1$．（方程式1点．解は問わない）

初期値問題の解：$x(t)=e^{-t}+e^{-2t}$．（1点）

(3) 配点3点

特性方程式と特性解：$\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2=0$．$\lambda=2$．重解．

一般解：$x(t)=(A+Bt)e^{2t}$．（1点）

導関数：$x'(t)=(2A+B+2Bt)e^{2t}$．

初期条件：$\begin{cases} x(0)=A=1, \\ x'(0)=2A+B=1 \end{cases} \Rightarrow A=1, B=-1$．（方程式1点．解は問わない）

初期値問題の解：$x(t)=(1-t)e^{2t}$．（1点）

(4) 配点3点

特性方程式と特性解：$\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2=0$． $\lambda=-1$． 重解.

一般解：$x(t)=(A+Bt)e^{-t}$． （1点）

導関数：$x'(t)=(-A+B-Bt)e^{-t}$．

初期条件：$\begin{cases} x(0)=A=1, \\ x'(0)=-A+B=1 \end{cases} \Rightarrow A=1, B=2$． （方程式1点．解は問わない）

初期値問題の解：$x(t)=(1+2t)e^{-t}$． （1点）

(5) 配点4点

特性方程式と特性解：$\lambda^2-\lambda+1=0$． $\lambda=\alpha\pm i\beta=\frac{1}{2}\pm i\frac{1}{2}\sqrt{3}$． 2虚解.

一般解：$x(t)=e^{t/2}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$． （1点）

導関数：$x'(t)=e^{t/2}\left(\left(\frac{1}{2}A+\frac{\sqrt{3}}{2}B\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}A+\frac{1}{2}B\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$． （1点）

初期条件：$\begin{cases} x(0)=A=0, \\ x'(0)=\frac{1}{2}A+\frac{\sqrt{3}}{2}B=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow A=0, B=1$． （方程式1点．解は問わない）

初期値問題の解：$x(t)=e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$． （1点）

(6) 配点4点

特性方程式と特性解：$\lambda^2+2\lambda+2=0$． $\lambda=\alpha\pm i\beta=-1\pm i$． 2虚解.

一般解：$x(t)=e^{-t}\left(A\cos t+B\sin t\right)$． （1点）

導関数：$x'(t)=e^{-t}\left((-A+B)\cos t+(-A-B)\sin t\right)$． （1点）

初期条件：$\begin{cases} x(0)=A=1, \\ x'(0)=-A+B=0 \end{cases} \Rightarrow A=1, B=1$． （方程式1点．解は問わない）

初期値問題の解：$x(t)=e^{-t}(\cos t+\sin t)$． （1点）