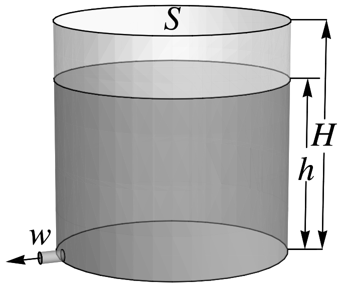
微積分学II 第2回 微分方程式2

４．水槽の漏水（応用例）



水平断面積 S，高さ H の円筒水槽があり，満水状態である．時刻 $t=0$ で底に開口面積 w の小さな穴が開き，水が流出して水面が低下し始める．時刻 $t \geq 0$ での水面の高さ $h(t)$ を求めよう．

重力加速度を g として，水面の高さが h のときに穴から出る水の速さは，$\sqrt{2gh}$ である（トリチェリ(Torricelli)の定理）．この物理法則から微分方程式を導く．

時刻 t における水槽内の水量を $V(t)$ とすると単位時間の水量の変化は $\dfrac{dV(t)}{dt}$ である．トリチェリの定理より単位時間に流失する水量は $w \times \sqrt{2gh(t)}$ ゆえ，微分方程式

$$\frac{dV(t)}{dt} = -w\sqrt{2gh(t)} \tag{4.1}$$

が成り立つ．（ここまでは水槽の形状と無関係である．）

水槽の形状から $V(t) = S \times h(t)$ である．これを(4.1)に代入して，

$$\frac{d}{dt}Sh(t) = -w\sqrt{2gh(t)}\ . \tag{4.2}$$

これを整理して，h に関する微分方程式

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{w\sqrt{2g}}{S}\sqrt{h} \tag{4.3}$$

が得られる．定数

$$a = \frac{w\sqrt{2g}}{S} \tag{4.4}$$

を導入することにより，(4.3)は簡単に

$$\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{h} \tag{4.5}$$

と書ける．これを解いて，水面の高さの変化 $h = h(t)$ を求めることができる．

方程式(4.5)を変数分離して，

$$\frac{dh}{\sqrt{h(t)}} = -adt\ .$$

両辺を積分して，

$$2\sqrt{h} = \int \frac{dh}{\sqrt{h}} = -a\int dt + C = -at + C \quad （C\text{ は積分定数}）. \tag{4.6}$$

これを h に関して解いて，水面の高さを表す一般解は

$$h = h(t) = \frac{1}{4}(C - at)^2 \quad （C\text{ は任意定数}） \tag{4.7}$$

である．

初期条件 $t=0, h=H$ と(4.7)より，

$$H = h(0) = \frac{1}{4}C^2 . \tag{4.8}$$

ゆえに，

$$C = 2\sqrt{H} .$$

これを，一般解(4.7)に代入して，解は最終的に

$$h(t) = \frac{1}{4}(2\sqrt{H} - at)^2 . \quad // \tag{4.9}$$

水槽が空になる時刻 t_e は， $h(t_e) = \frac{1}{4}(2\sqrt{H} - at_e)^2 = 0$ と a の定義(4.4)より，

$$t_e = \frac{2\sqrt{H}}{a} = \frac{2S\sqrt{H}}{w\sqrt{2g}} = \frac{S}{w}\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

である． t_e は水槽の高さの平方根 $\sqrt{H}$ と開口比 S/w に比例し，重力加速度の平方根 $\sqrt{g}$ に反比例する．

５．定係数2階線形方程式

様々な物理現象が，次のような微分方程式

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = g(t) \tag{5.1}$$

で表される．ここで， $x(t)$ は未知関数， a,b は定数係数， $g(t)$ は既知関数である．これを，**定係数２階線形方程式**という．特に， $g(t)=0$ の場合

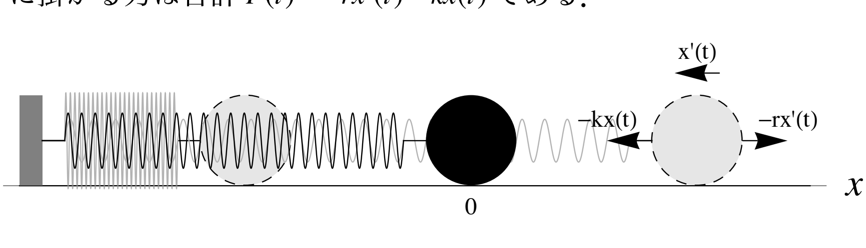
$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0 \tag{5.2}$$

を**斉次（同次）方程式**という．

［例１］媒体（空気や水）中のバネ振り子（下図）の運動を考える．質量 m の振り子（下図の黒い丸）の位置を $x(t)$ とする．バネが振り子に力を及ぼさない中立位置を原点 $x=0$ とする．振り子の速度は $x'(t)$，加速度は $x''(t)$ である．

振り子は位置と比例し，原点に引き戻そうとする力 $-kx(t)$ をバネから受ける． k はバネの強さを表すバネ定数である．

また，速さと比例し，速度と反対向きの力 $-rx'(t)$ を媒体から受ける． r は抵抗の強さを表す抵抗係数である．振り子に掛かる力は合計 $F(t) = -rx'(t) - kx(t)$ である．



ニュートンの運動法則より，振り子の位置 $x(t)$ は運動方程式

$$mx''(t) = F(t) = -rx'(t) - kx(t) \tag{5.3}$$

を満たす．これは定係数2階線形方程式の斉次方程式である．//

＜斉次方程式の解＞

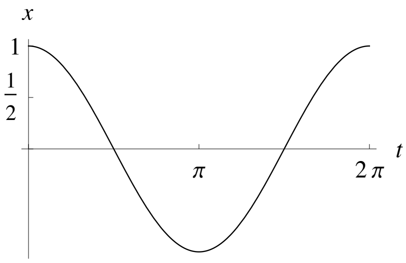
式(5.3)で質量を $m=1$ とした

$$x''(t)+rx'(t)+kx(t)=0 \tag{5.4}$$

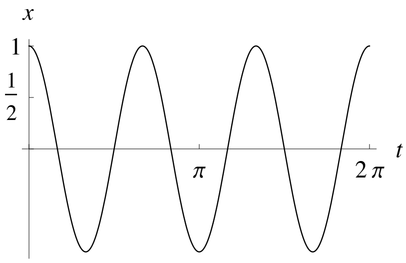
で，初期値を $x(0)=1, x'(0)=0$ とする．これは， $x=1$ の位置に引っ張り固定した振り子を $t=0$ で放したときの運動である．抵抗係数 $r\geq 0$，バネ定数 $k\geq 0$ を様々に変えてみると下図のような運動が見られる．図は右に行くにつれ， k が大きく（バネが堅く）なり，下に行くにつれ r が大きく（抵抗が大きく）なる．

(1) 抵抗がない($r=0$)場合． k を大きく(バネが堅く)すると，

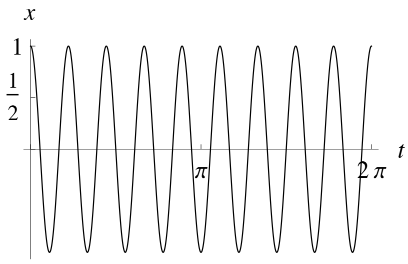
$\{r=0,\ k=1\}$



$\{r=0,\ k=9\}$

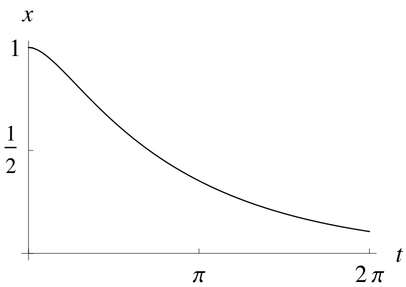


$\{r=0,\ k=81\}$

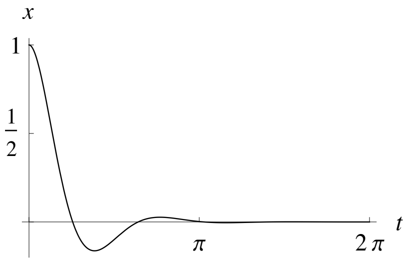


(2) 抵抗が小さい($r=3$)場合． k を大きく(バネが堅く)すると，

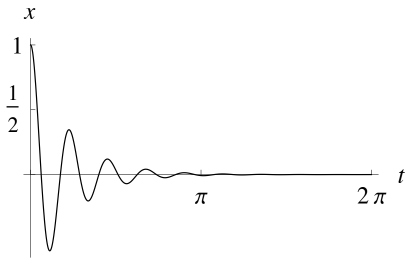
$\{r=3,\ k=1\}$



$\{r=3,\ k=9\}$

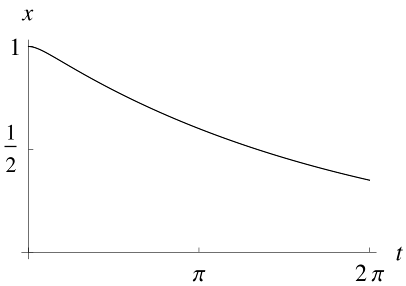


$\{r=3,\ k=81\}$

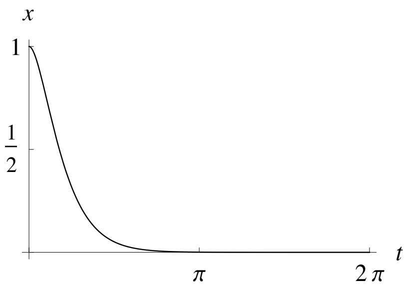


(2) 抵抗が大きい($r=6$)場合． k を大きく(バネが堅く)すると，

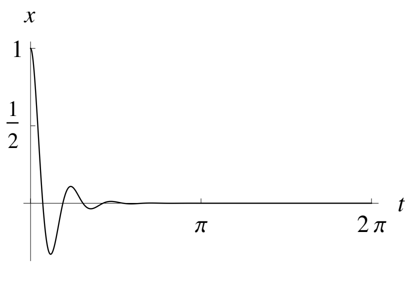
$\{r=6,\ k=1\}$



$\{r=6,\ k=9\}$



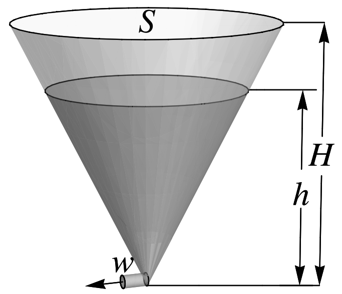
$\{r=6,\ k=81\}$



抵抗のないときの解は， $x(t)=\cos(\omega t)$ のように見える．バネが強くなると振動数が増える．抵抗が入ると， $x(t)=e^{-\alpha t}\cos(\omega t)$ のような減衰振動となり，抵抗が大きいときには $x(t)=e^{-\alpha t}$ のような振動無しの減衰解が現れる．

第2回練習問題

図のように底面積 S，高さ H の逆円錐の水槽があり，満水状態である．時刻 $t=0$ で底に開口面積 w の小さな穴が開き，水が流出して水面が低下し始める．時刻 $t \geq 0$ での水面の高さ $h(t)$ を求める．



時刻 t における水槽内の水量を $V(t)$ とすると単位時間の水量の変化は $\frac{dV(t)}{dt}$ である．トリチェリの定理より単位時間に流失する水量は $w \times \sqrt{2gh(t)}$ ゆえ，微分方程式

$$\frac{dV(t)}{dt} = -w\sqrt{2gh(t)} \qquad (1)$$

が成り立つ．（ここまでは，水槽の形状と無関係．）

水面の面積は， h^2 に比例し， $S\left(\frac{h}{H}\right)^2$ である．よって，水量は $V = \frac{1}{3}S\left(\frac{h}{H}\right)^2 h$ である．これを(1)に代入して，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Sh^3}{3H^2}\right) = \frac{3Sh^2}{3H^2}\frac{dh}{dt} = -w\sqrt{2gh} \,. \qquad (2)$$

これを整理して， h に関する微分方程式

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{H^2 w}{Sh^2}\sqrt{2gh} = -\frac{H^2 w\sqrt{2g}}{S}h^{-3/2} \qquad (3)$$

が得られる．定数

$$a = \frac{H^2 w\sqrt{2g}}{S} \qquad (4)$$

を導入することにより，(3)は簡単に

$$\frac{dh}{dt} = -ah^{-3/2} \qquad (5)$$

と書ける．

問1．変数分離により，微分方程式(5)の一般解を求めよ．

問2．初期条件 $h(0) = H$ により任意定数を定め，解 $h(t)$ を決定せよ．

問3．水槽が空になる時刻 $t = t_e$ を求めよ．

第2回解答

問1．変数分離により，微分方程式

$$\frac{dh}{dt}=-ah^{-3/2}\ ,\ a=\frac{H^2w\sqrt{2g}}{S} \tag{5}$$

の一般解を求めよ．（5点）

式(a)が合っていれば3点．(b)は形が合っていれば部分点1点

変数分離して，$h^{3/2}dh=-adt$．これを積分して，

$$\frac{2}{5}h^{5/2}=-at+C \qquad (C\ は積分定数) \tag{a}$$

ゆえに一般解は

$$h(t)=\left(\frac{5}{2}\right)^{2/5}(C-at)^{2/5}\ . \tag{b}$$

特殊解はない．

問2．初期条件 $h(0)=H$ により任意定数を定め，解 $h(t)$ を決定せよ．（5点）

式(c)が合っていれば3点．(d)は形が合っていれば部分点1点．

式(a)に初期条件 $t=0, h=H$ を代入して，

$$\frac{2}{5}H^{5/2}=C \tag{c}$$

ゆえに，

$$h(t)=\left(\frac{5}{2}\right)^{2/5}\left(\frac{2}{5}H^{5/2}-at\right)^{2/5}\ ,\ a=\frac{H^2w\sqrt{2g}}{S} \tag{d}$$

問3はやらない．

問3．水槽が空になる時刻 $t=t_e$ を求めよ．

(d)より，

$$t_e=\frac{2}{5}\frac{H^{5/2}}{a}=\frac{2}{5}\frac{H^{5/2}S}{H^2w\sqrt{2g}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{S}{w}\sqrt{\frac{2H}{g}} \tag{e}$$

となる．これは，先週調べた同じ垂直投影面積 S と高さ H を持つ円筒水槽の場合の1/5である．