微積分学II 第1回 微分方程式1

1．微分方程式

x を実数 t の関数 $x = x(t)$ とする．$x(t)$ を未知関数とする

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{1.1}$$

のような方程式を**微分方程式（常微分方程式）**と言う．x が t の関数であることを自明として，

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1.2}$$

と書くこともある．

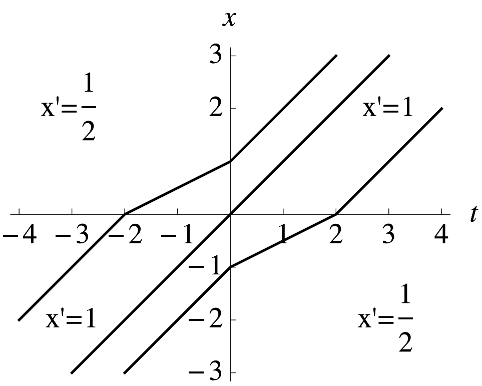
一本の道路を数直線と見なす．t を時間，$x(t)$ を車の位置とすると，$x'(t)$ は車の速度である．道路には制限速度があり，車はその制限速度で走ることとする．方程式

$$x'(t) = f(t) \tag{1.3}$$

は制限速度が時間で決まっていることを示す微分方程式．
また，方程式

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{1.4}$$

は制限速度が場所で決まっていることを示す微分方程式．
方程式(1.1)は，制限速度が場所と時間で決まるという，一般的な状況を表している(上図)．



方程式(1.3)は，時刻 a を決めて，両辺を a から t まで積分し，

$$x(t) = \int_a^t f(s)\,ds + x(a) \tag{1.5}$$

のように解ける．ただし，時刻 a における車の位置 $x(a) = b$ が必要である．条件

$$x(a) = b \tag{1.6}$$

を微分方程式の**初期条件**と言う．初期条件を満たす解を求める問題を**初期値問題**という．

2．変数分離形の解法

微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x) \tag{2.1}$$

を**変数分離形**という．この解法を考えよう．
＜一＞一般解：$g(x(t)) \neq 0$ のとき

両辺で $g(x)$ で割って，

$$\frac{1}{g(x)}\frac{dx}{dt} = f(t)\,. \tag{2.2}$$

両辺を t で積分して，

$$\int \frac{1}{g(x)}\frac{dx}{dt}\,dt = \int f(t)\,dt + C\,. \tag{2.3}$$

$x = x(t)$ は t の関数だから，置換積分の公式より，

$$\int \frac{1}{g(x)}dx = \int \frac{1}{g(x(t))}x'(t)dt = \int \frac{1}{g(x)}\frac{dx}{dt}dt = \int f(t)dt + C \tag{2.4}$$

である．見やすくするために， $G(x) = \int \frac{1}{g(x)}dx, F(t) = \int f(t)dt$ と書けば，

$$G(x) = F(t) + C \tag{2.5}$$

である．この方程式を x について解いて， t における x の値 $x(t)$ が決まる．得られる解 $x(t)$ は任意定数 C を含む．このように任意定数を含む解を**一般解**と呼ぶ．

式(2.1)から(2.4)への変形は次のように形式的（代数的）に書ける．

$$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x) \overset{1}{\Rightarrow} \frac{dx}{g(x)} = f(t)dt \overset{2}{\Rightarrow} \int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)dt$$

$\overset{1}{\Rightarrow}$ の後，変数 x,t は等号を挟んで左右に分離される．これが変数分離の名の由来である．

＜特＞特殊解： $g(x(t)) = 0$ のとき

$x(t)$ は x に関する方程式 $g(x) = 0$ の解である．方程式 $g(x) = 0$ の解の一つを $x = \alpha$ とし，定数関数 $x(t) = \alpha$ とする．このとき， $x'(t) = 0, f(x)g(x) = f(x)g(\alpha) = 0$ であるから， $x(t) = \alpha$ は微分方程式(2.1)を満たす解である．このように任意乗数を含まない解を**特殊解**と呼ぶ．

変数分離型の解法は，以下のようにまとめられる．

――ポイント１――

＜一＞ 一般解：

(1) 変数分離する： $\frac{dx}{g(x)} = f(t)dt$

(2) 両辺を積分： $G(x) = \int \frac{1}{g(x)}dx = \int f(t)dt + C = F(t) + C$

(3) 方程式を x に関して解く．

＜特＞ 特殊解：

(1) 方程式 $g(x) = 0$ の解 $x = \alpha$ （複数かもしれない）を求める．

(2) 定数関数の解 $x(t) = \alpha$ を得る．

［注意］＜２＞の特殊解を＜１＞の一般解に含めることが出来る場合がある（例１）．

［例１］微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = tx \tag{2.6}$$

の一般解を求めよ．この問題では， $f(t) = t, g(x) = x$ である．

＜１＞ 一般解：

(1) 変数分離する： $\frac{dx}{x} = tdt$

(2) 両辺を t で積分： $\int \frac{dx}{x} = \int t\,dt + C$

両辺の積分を求めると，

$$\log|x| = \frac{1}{2}t^2 + C \qquad (C\text{ は任意定数})$$

である．これを x について解くと，

$$|x| = e^{t^2/2+C} = e^C e^{t^2/2}. \quad \therefore x = \pm e^C e^{t^2/2}.$$

となる．符号 ± と C を任意に選んで解 $x = x(t)$ が定まる．$\pm e^C$ を改めて C と置くと，解は

$$x(t) = C\,e^{t^2/2} \qquad (C\text{ は0以外の任意定数}) \tag{2.7}$$

と書ける．

＜２＞ 特殊解：

(1) $g(x) = 0$ を解いて，$x = 0$．

(2) 定数関数の解 $x(t) = 0$ を得る．

この解は，一般解(2.7)で $c = 0$ と置いたものに等しい．この解を一般解に含めてやれば，微分方程式の一般解は

$$x(t) = C\,e^{t^2/2} \qquad (C\text{ は任意定数}) \tag{2.8}$$

である．

［例２］微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = ax \qquad (a\text{ ：定数}) \tag{2.9}$$

の一般解を求めよ．この問題では，$f(t) = a, g(x) = x$ である．

例１と同様にして一般解

$$x(t) = C\,e^{at} \qquad (C\text{ は任意定数}) \tag{2.10}$$

が得られる．これは，公式として憶えておくと良い．

３．定数変化法

微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = a\,x + g(t) \qquad (a\text{ ：定数}) \tag{3.1}$$

の解法を考える．これは，(2.9)を一般化したものである．

新たな未知関数 $y(t)$ を導入し，

$$x(t) = y(t)e^{at} \tag{3.2}$$

が解であると仮定する．これは(2.10)の定数 C を変化する関数 $y(t)$ で置き換えたものである．これが**定数変化法**の名の由来である．これを(3.1)に代入して整理すると，

$$\frac{dx}{dt} - \bigl(a\,x + g(t)\bigr) = y'(t)e^{at} + a\,y(t)e^{at} - \Bigl(a\,y(t)e^{at} + g(t)\Bigr) = y'(t)e^{at} - g(t) = 0\,.$$

これより，$y'(t)e^{at} = g(t)$，すなわち，$y'(t) = g(t)e^{-at}$．ゆえに，

$$y(t) = \int g(t)e^{-at}\,dt + C \qquad (C\text{ は積分定数}) \tag{3.3}$$

である．これを(3.2)に代入して，一般解

$$x(t) = Ce^{at} + e^{at}\int g(t)e^{-at}\,dt \qquad (C\text{ は任意定数}) \tag{3.4}$$

が得られる．以上を纏めると，

———ポイント２——

微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} = a\,x + g(t)$ の一般解は,

$$x(t) = Ce^{at} + e^{at}\int g(t)e^{-at}\,dt \qquad (C\text{ は任意定数}).$$

[例３] 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -2x + \cos t \tag{3.5}$$

の一般解を求めよ．

方程式(3.1)で $a = -2,\ g(t) = \cos t$ としたものである．一般解は式(3.4)で与えられるので,

$$x(t) = Ce^{-2t} + e^{-2t}\int e^{2t}\cos t\,dt. \tag{3.6}$$

教科書p.70の公式

$$\int e^{at}\cos bt\,dt = \frac{e^{at}}{a^2+b^2}\left(a\cos bt + b\sin bt\right) \tag{3.7}$$

により(3.6)の積分項を計算すると，一般解は,

$$x(t) = Ce^{-2t} + e^{-2t}\frac{e^{2t}}{5}\left(2\cos t + \sin t\right) = Ce^{-2t} + \frac{2\cos t + \sin t}{5} \tag{3.8}$$

となる．//

第1回練習問題

１．次の微分方程式の全ての解を求めよ（変数分離形：ポイント１）．

(1) $\dfrac{dx}{dt} = tx^2$　(2) $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - 1$

(3) $\dfrac{dx}{dt} = \sqrt{1-x^2}$　(4) $\dfrac{dx}{dt} = (2-x)(3-x)$

２．次の微分方程式の一般解を求めよ（ポイント２）．

(1) $\dfrac{dx}{dt} = 3x + t$　(2) $\dfrac{dx}{dt} = x + \sin t$

(3) $\dfrac{dx}{dt} = 2x + e^{-t}$　(4) $\dfrac{dx}{dt} = -x + e^{-t}$

第1回練習問題

１．次の微分方程式の全ての解を求めよ（変数分離形：ポイント１）．

(1) $\dfrac{dx}{dt}=tx^2$　　(2) $\dfrac{dx}{dt}=x^2-1$

(3) $\dfrac{dx}{dt}=\sqrt{1-x^2}$　　(4) $\dfrac{dx}{dt}=(2-x)(3-x)$

２．次の微分方程式の一般解を求めよ（ポイント２）．

(1) $\dfrac{dx}{dt}=3x+t$　　(2) $\dfrac{dx}{dt}=x+\sin t$

(3) $\dfrac{dx}{dt}=2x+e^{-t}$　　(4) $\dfrac{dx}{dt}=-x+e^{-t}$

解答

１．(1) 配点3点 一般解2点特殊解1点を正解のみに与える．

<一>変数分離して，$\dfrac{dx}{x^2}=tdt$．これを両辺積分して，$\displaystyle\int\frac{dx}{x^2}=\int t\,dt+c$（$c$ は積分定数).

$$\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x},\ \int t\,dt=\frac{1}{2}t^2$$

を代入して，$-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}t^2+c$．これを x について解いて，一般解は

$$x(t)=-\frac{2}{t^2+2c}=-\frac{2}{t^2+C}.$$

ここで，$C=2c$ は任意定数である．

<特>方程式 $x^2=0$ の解 $x=0$．これより，特殊解 $x(t)=0$ を得る．//

１．(2) 配点3点 一般解2点特殊解1点を正解のみに与える．

<一>変数分離して，$\dfrac{dx}{x^2-1}=dt$．これを両辺積分して，$\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-1}=\int dt=t+c$（$c$ は積分定数).

$$\int\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

を代入して，$\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|=t+c$．これより，$\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|=e^{2t+2c}$．ゆえに，$\dfrac{x-1}{x+1}=\pm e^{2c}e^{2t}=Ce^{2t}$．ここで，$C=\pm e^{2c}$ である．これを x について解いて，

$$x-1=Ce^{2t}x+Ce^{2t}\ \Rightarrow\ \left(1-Ce^{2t}\right)x=1+Ce^{2t}\ \Rightarrow\ x=\frac{1+Ce^{2t}}{1-Ce^{2t}}.$$

これより，一般解は

$$x(t)=\frac{1+Ce^{2t}}{1-Ce^{2t}}\quad（C\neq 0 は任意定数）.$$

（c は任意ゆえ，$C=\pm e^{2c}$ は0以外の任意の値を取り得るのでこのように書く．）

＜特＞方程式 $x^2-1=0$ の解 $x=\pm 1$．これより，特殊解 $x(t)=\pm 1$ を得る．//

1．(3) 配点3点 一般解2点特殊解1点を正解のみに与える．

＜一＞変数分離して，$\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=dt$．これを両辺積分して，$\sin^{-1}x=t+c$（$c$ は積分定数)．これを x について解いて，一般解は

$$x=\sin(t+c)\quad（c \text{ は任意定数}）.$$

＜特＞方程式 $\sqrt{1-x^2}=0$ の解 $x=\pm 1$．これより，特殊解 $x(t)=\pm 1$ を得る．//

1．(4) 配点3点 一般解2点特殊解1点を正解のみに与える．

＜一＞変数分離して，$\dfrac{dx}{(2-x)(3-x)}=dt$．これを両辺積分して，$\log\left|\dfrac{3-x}{2-x}\right|=t+c$（$c$ は積分定数)．これをより，

$$\left|\frac{3-x}{2-x}\right|=e^{t+c}.\ \therefore\ \frac{3-x}{2-x}=\pm e^{t+c}=Ce^t\quad (C=\pm e^c\neq 0).$$

これを x について解いて，一般解は

$$x=\frac{2Ce^t-3}{Ce^t-1}\quad（C\neq 0 \text{ は任意定数}）.$$

＜特＞方程式 $(2-x)(3-x)=0$ の解 $x=2,3$．これより，特殊解 $x(t)=2,\ x(t)=3$ を得る．//

2．(1) 正解のみ2点

ポイント２で $a=3,\ g(t)=t$ として，

$$x(t)=Ce^{3t}+e^{3t}\int te^{-3t}\,dt=Ce^{3t}+e^{3t}\left(-\frac{1}{3}te^{-3t}+\frac{1}{3}\int e^{-3t}\,dt\right)$$
$$=Ce^{3t}+e^{3t}\left(-\frac{1}{3}te^{-3t}-\frac{1}{9}e^{-3t}\right)=Ce^{3t}-\frac{1}{9}(3t+1).//$$

2．(2) 正解のみ2点

ポイント２で $a=1,\ g(t)=\sin t$ として，

$$x(t)=Ce^t+e^t\int e^{-t}\sin t\,dt.$$

部分積分により，

$$\int e^{-t}\sin t\,dt=-e^{-t}\sin t+\int e^{-t}\cos t\,dt=-e^{-t}\sin t+\left(-e^{-t}\cos t-\int e^{-t}\sin t\,dt\right).$$

これを $\int e^{-t}\sin t\,dt$ について解いて，

$$\int e^{-t}\sin t\,dt=-\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t+\cos t).$$

これを代入して，

$$x(t) = Ce^{t} - \frac{1}{2}e^{t}e^{-t}\left(\sin t + \cos t\right) = Ce^{t} - \frac{1}{2}\left(\sin t + \cos t\right). \ //$$

２．(3) 正解のみ2点

ポイント２で $a = 2$，$g(t) = e^{-t}$ として，

$$x(t) = Ce^{2t} + e^{2t}\int e^{-t}e^{-2t}\,dt = Ce^{2t} - \frac{1}{3}e^{2t}e^{-3t} = Ce^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t}. \ //$$

２．(4) 正解のみ2点

ポイント２で $a = -1$，$g(t) = e^{-t}$ として，

$$x(t) = Ce^{-t} + e^{-t}\int e^{-t}e^{t}\,dt = Ce^{-t} + te^{-t} = (t + C)e^{-t}. \ //$$