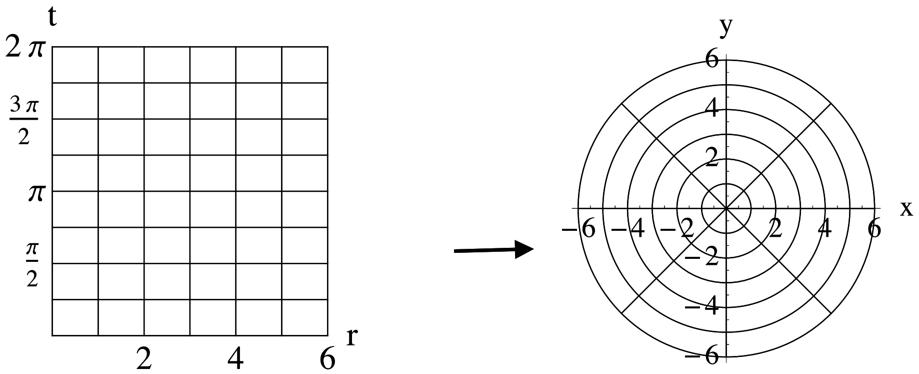
微積分学II第14回 極座標変換

1．極座標変換

極座標表示の式 $x=r\cos t,\ y=r\sin t$ を rt 平面から xy 平面への変換と見なしたもの.



極座標変換のヤコビアン

$$J=r.\quad \because J=\det\begin{pmatrix} x_r & x_t \\ y_r & y_t \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{pmatrix}=r\cos^2 t+r\sin^2 t=r.$$

極座標変換公式

極座標変換で領域 Δ が1:1で領域 D に写るとき,

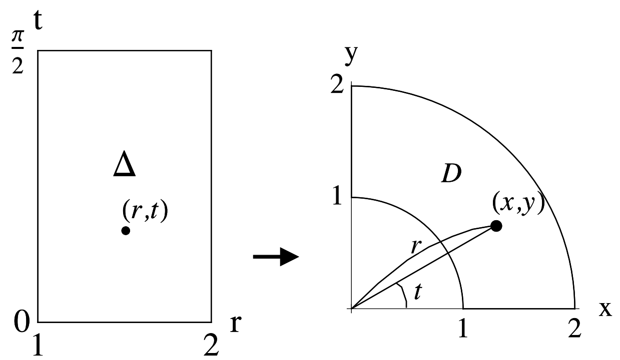
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_\Delta f(r\cos t, r\sin t)\,\underbrace{r}_{|J|}\,dr\,dt\ .$$

［例1］扇型領域 $D:1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0$ ，の上の積分 $V=\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.

D は扇形領域．極座標変換で D に写る領域 Δ は, $(x,y)\in D$ の動径 r と偏角 t の範囲から,

$$\Delta:1\le r\le 2,\ 0\le t\le \frac{\pi}{2}$$

である．極座標変換公式より,



$$\begin{aligned}\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy &=\iint_\Delta e^{-r^2}r\,dr\,dt\overset{A}{=}\int_0^{\pi/2}\left(\int_1^2 e^{-r^2}r\,dr\right)dt \\ &\overset{B}{=}\left(\int_1^2 e^{-r^2}r\,dr\right)\int_0^{\pi/2}dt\overset{C}{=}\frac{1}{2}\left[-e^{-r^2}\right]_1^2\frac{\pi}{2} \\ &=\frac{\pi}{4}(e^{-1}-e^{-4}).\end{aligned}$$

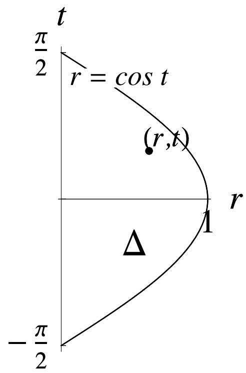
A:累次積分にする．B:定数 $\left(\int_1^2 e^{-r^2}r\,dr\right)$ を t 積分の外へ．C:置換積分($u=r^2$)．//

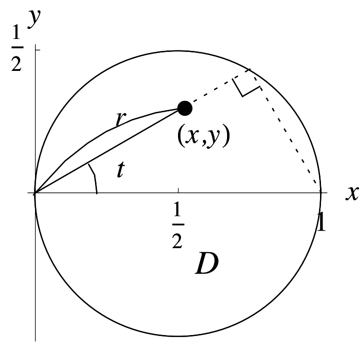
［公式］ $\int_a^b\left(\int_c^d f(x)g(y)\,dy\right)dx=\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)$.

$$\because \int_a^b\left(\int_c^d f(x)g(y)\,dy\right)dx=\int_a^b f(x)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)dx=\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)\int_a^b f(x)dx=\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right).$$

［例2］円板 $D: x^2+y^2 \le x$，の上の積分 $V=\iint_D \sqrt{x}\,dx\,dy$．

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_D \sqrt{x}\,dx\,dy = \iint_\Delta \sqrt{r\cos t}\; r\,dr\,dt \\
&\overset{A}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos t}\sqrt{r\cos t}\; r\,dr\right)dt \\
&\overset{B}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos t} r^{3/2}\,dr\right)\cos^{1/2} t\,dt \\
&\overset{C}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{2}{5}\cos^{5/2} t\right)\cos^{1/2} t\,dt \\
&= \frac{2}{5}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3 t\,dt = \frac{2}{5}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2 t)\cos t\,dt \\
&\overset{D}{=} \frac{2}{5}\int_{-1}^{1}(1-s^2)\,ds = \frac{2}{5}\left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{15}.
\end{aligned}
$$

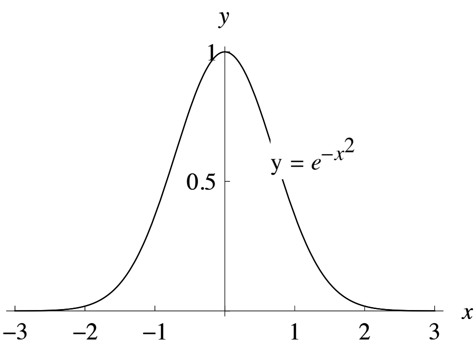




A：累次積分に．B：定数 $\cos^{1/2} t$ を外へ．C： r 積分実行．D： $s=\sin t$ で置換積分．//

［例3］公式 $S=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$．これを示す．

$$
\begin{aligned}
S^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)e^{-y^2}\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\right)dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.
\end{aligned}
$$

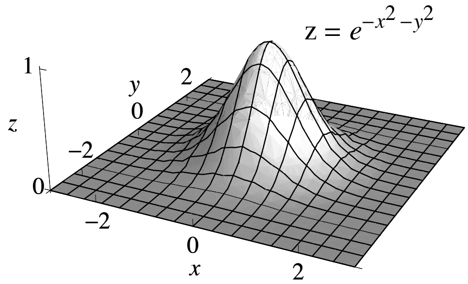


$\mathbb{R}^2$ は全平面である．極座標変換 $x=r\cos t, y=r\sin t$ で,

$\Delta: 0\le r<\infty, 0\le t<2\pi$ は全平面に写るので， $x^2+y^2=r^2$ に

注意して，A:累次積分，B:変数変換 $u=r^2$ により，

$$
\begin{aligned}
S^2 &= \iint_\Delta e^{-r^2}\,r\,dr\,dt \overset{A}{=} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dt\right)dt \\
&\overset{B}{=} \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-u}\,du\right)dt \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}dt = \pi.
\end{aligned}
$$



両辺の平方根をとり，求める公式を得る．//

第14回練習問題

次の重積分の積分領域 D を図示し，積分値を極座標変換により計算せよ．

(1) $V=\iint_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy\ , D: x^2+y^2\le 1, x\ge 0.$

(2) $V=\iint_D x\,dx\,dy\ , D: x^2+y^2\le x.$

第14回練習問題

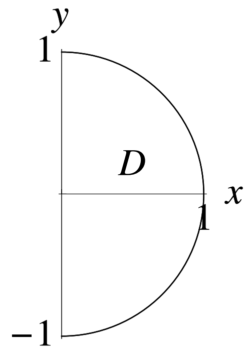
次の重積分の積分領域 D を図示し，積分値を極座標変換により計算せよ．

(1) $V=\iint_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$, $D: x^2+y^2 \le 1, x \ge 0$.

(2) $V=\iint_D x\,dx\,dy$, $D: x^2+y^2 \le x$.

解答

(1)

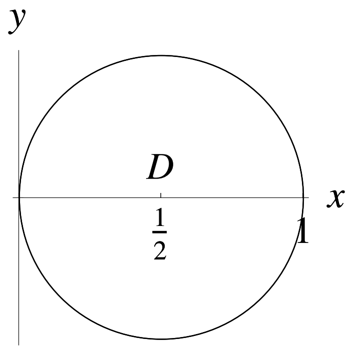


作図(右図)．(配点1点.軸名，座標，領域名D等がなければ0点)

変換(配点2点)： $V=\iint_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^1 e^{r^2}\,r\,dr\right)dt.$

計算(配点2点)： $V=\pi\int_0^1 e^{r^2}\,r\,dr=\pi\frac{1}{2}\left[e^{r^2}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}(e-1).$

(2)



作図(右図)．(配点1点.軸名，座標，領域名D等がなければ0点)

変換(配点2点)： $V=\iint_D x\,dx\,dy=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos t}(r\cos t)\,r\,dr\right)dt.$

計算(配点2点)： $V=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\left(\int_0^{\cos t} r^2\,dr\right)dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\frac{\cos^3 t}{3}dt$

ここで，

$$\cos^4 t=\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1+2\cos 2t+\cos^2 2t)=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)$$

と

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 2t\,dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 4t\,dt=0$$

より，

$$V=\frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt=\frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}\right)dt=\frac{1}{8}\pi.$$