微積分学II第13回 変数変換

1．2次元変数変換と面積

uv 平面の領域 Δ 上の点 $\boldsymbol{q}=(u,v)$ から， xy 平面の領域 D 上の点 $\boldsymbol{p}=(x,y)$ への1対1写像

$$(x,y)=\Phi(u,v)=(x(u,v),\,y(u,v)) \tag{1}$$

を考える(図1)．これを，簡単に $\boldsymbol{p}=\Phi(\boldsymbol{q})$ とも書く．

Δ を現地 D の地図と考えると， Φ は地図上の座標 $\boldsymbol{q}$ から現地の座標 $\boldsymbol{p}=\Phi(\boldsymbol{q})$ を求める計算式である．例えば図1は，経度を u 緯度を v とした高緯度地方の地図 Δ と現地 D の関係を模したものである．

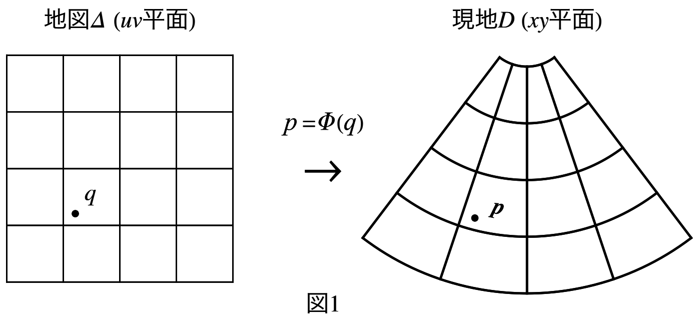


図1

図をみると， Δ の小区画の面積と，それが D に写った小領域の面積の比は，小区画の位置によって異なる．これに関して，次の定理が成り立つ．

［定理1］ Δ 内の点 $\boldsymbol{q}=(u,v)$ を含む長方形領域を $A\subset\Delta$ とし， A の外接円の半径を $r(A)$ とする． A の Φ による像を B とし， A,B の面積を $S(A),S(B)$ とするとき，

$$\lim_{r(A)\to 0}\frac{S(B)}{S(A)}=|J(\boldsymbol{q})|,\quad J(\boldsymbol{q})=\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}=x_u y_v - x_v y_u\,. \quad // \tag{2}$$

$J(\boldsymbol{q})$ は行列 $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$ の行列式で，変換 Φ の**ヤコビアン**と言う． Δ の小区画の面積と，それが D に写った小領域の面積の比は，小区画を小さくするとヤコビアンの絶対値に収束する．

2．重積分の変数変換

Δ を小長方形領域 $\Delta_1,\cdots,\Delta_n$ に分割し，代表点 $\boldsymbol{q}_i=(u_i,v_j)\in\Delta_i$ を取る． Φ による Δ_i の像を D_i とすると， D は $D_1,\cdots,D_n$ に分割され，代表点 $\boldsymbol{p}_i=\Phi(\boldsymbol{q}_i)\in D_i$ が定まる(図2)．ここで，定理1より，

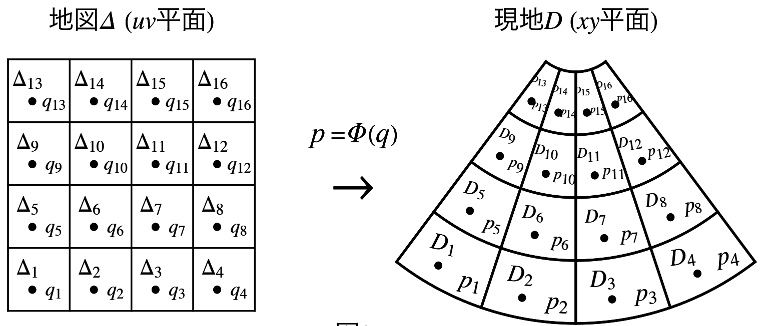


図2

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{p}_i)S(D_i)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\big(\Phi(\boldsymbol{q}_i)\big)\frac{S(D_i)}{S(\Delta_i)}S(\Delta_i)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\big(\Phi(\boldsymbol{q}_i)\big)|J(\boldsymbol{q}_i)|S(\Delta_i)\,. \tag{3}$$

重積分の定義より，左辺は D 上の $f(\boldsymbol{p})$ の積分，右辺は Δ 上の $f\big(\Phi(\boldsymbol{q})\big)|J(\boldsymbol{q})|$ の積分だから，

$$\iint_D f(\boldsymbol{p})\,dx\,dy=\iint_\Delta f\big(\Phi(\boldsymbol{q})\big)|J(\boldsymbol{q})|\,du\,dv \tag{4}$$

が示せた．

これに， $\boldsymbol{p}=(x,y),\boldsymbol{q}=(u,v)$ を代入して，次の公式が得られる．

―――――――――――――重積分の変数変換公式―――――――――――――

領域 $\varDelta$ から領域 D への1対1写像を $(x,y)=\varPhi(u,v)=(x(u,v),y(u,v))$ とすると，

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_\varDelta f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\big|J(u,v)\big|\,du\,dv,\ \big|J(u,v)\big|=\left|\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\right|=\big|x_u y_v-x_v y_u\big|.// \tag{5}$$

3．平行四辺形上の重積分→線形変換

平行四辺形 $D:0\le 2x-y\le 2, 0\le 2y-x\le 2$ 上の重積分

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

は線形変換 $u=2x-y, v=2y-x$ で，累次積分に変換できる．

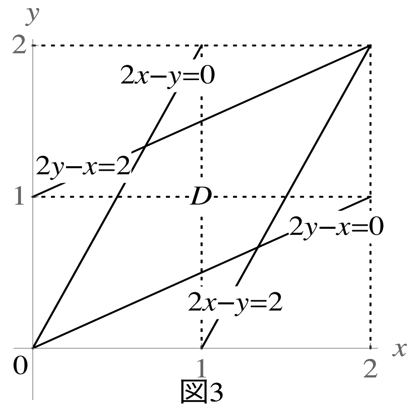


図3

① $\varDelta:0\le u\le 2, 0\le v\le 2$ とする．

（$D:0\le \underbrace{2x-y}_{u}\le 2, 0\le \underbrace{2y-x}_{v}\le 2$ より．）

② 線形変換

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\varPsi(x,y)=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x-y \\ 2y-x \end{pmatrix}$$

の逆変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\varPhi(u,v)=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (2u+v)/3 \\ (u+2v)/3 \end{pmatrix}$$

を求める．$\varPhi(u,v)$ は $\varDelta$ を1対1に D に写す．（$0\le u=2x-y\le 2, 0\le v=2y-x\le 2$ ゆえ，$\varPsi$ は D を $\varDelta$ に写す．逆に $\varPhi$ は領域 $\varDelta$ を D に写す．）

③ $\varPhi$ のヤコビアンを計算する．

$$J(u,v)=\det\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}=\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{1}{3}.$$

④ 公式(5)より，

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_\varDelta f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\big|J(u,v)\big|\,du\,dv$$

$$=\iint_\varDelta f\left(\frac{2u+v}{3},\frac{u+2v}{3}\right)\left|\frac{1}{3}\right|du\,dv=\frac{1}{3}\int_0^2\left(\int_0^2 f\left(\frac{2u+v}{3},\frac{u+2v}{3}\right)du\right)dv.//$$

第13回練習問題

平行四辺形 $D:-1\le x-y\le 1, -1\le x+y\le 1$ 上の重積分 $V=\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy$ について考える．

(1) 領域 D を図示せよ．

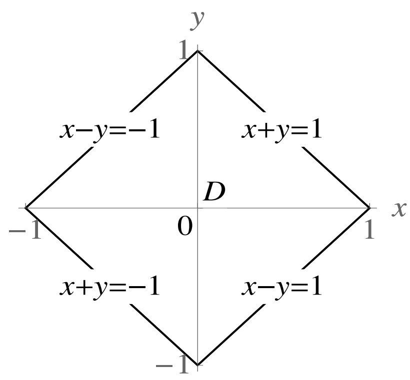
(2) 3節にしたがって，重積分 V を累次積分に変換せよ．積分値は求めなくても良い．

第13回練習問題

平行四辺形 $D: -1 \le x-y \le 1, -1 \le x+y \le 1$ 上の重積分 $V = \iint_D e^{x+y}\, dx\, dy$ について考える．

(1) 領域 D を図示せよ．

(2) 3節に習って重積分 V を累次積分に変換せよ．



解答

(1) 右図．(配点2点.軸名，座標，領域名D等がなければ1点)

(2) (配点8点)(計算ミス以降は見ない．Sudden Death!)

① (2点) $\Delta: -1 \le u \le 1, -1 \le v \le 1$ とする．

（$D: -1 \le \underbrace{x-y}_{u} \le 1, -1 \le \underbrace{x+y}_{v} \le 1$ より．）

② (2点)線形変換

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \Psi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$$

の逆変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u+v)/2 \\ (v-u)/2 \end{pmatrix}$$

は Δ を1対1に D に写す．

③ (2点) Φ のヤコビアンを計算して，

$$J(u,v) = \det\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

④ (2点)公式(5)より，

$$\iint_D e^{x+y}\, dx\, dy = \iint_\Delta e^{(u+v)/2+(v-u)/2} |J(u,v)|\, du\, dv$$
$$= \frac{1}{2}\iint_\Delta e^v\, du\, dv = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} e^v\, du\right) dv.//$$

（「②より $x+y=v$」でもよい．）

（定理1の証明概略）

地図上の点 $\boldsymbol{q}=(u,v)$ における微小面積 $du\times dv$ を何倍すれば，対応する現地の面積となるかを論ずる．この面積倍率 R は点によって異なる(図1)ので，$R(\boldsymbol{q})$ と書くことにする．さて，

$x=x(u,v), y=y(u,v), x_u=x_u(u,v), y_v=y_v(u,v)$ などと略記すると，テイラーの定理より，

$$\boldsymbol{\Phi}\begin{pmatrix}u+h\\v+k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(u+h,v+k)\\y(u+h,v+k)\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}x+x_uh+x_vk\\y+y_uh+y_vk\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{p}}+\underbrace{\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{p}_u}h+\underbrace{\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{p}_v}k=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_uh+\boldsymbol{p}_vk \tag{a}$$

（この式以降，ベクトルの縦横を区別しない）．ゆえに，

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{\Phi}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{\Phi}\begin{pmatrix}u+du\\v\end{pmatrix}\cong\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_uh,\ \boldsymbol{\Phi}\begin{pmatrix}u\\v+dv\end{pmatrix}\cong\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_vk,\ \boldsymbol{\Phi}\begin{pmatrix}u+du\\v+dv\end{pmatrix}\cong\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_uh+\boldsymbol{p}_vk\ . \tag{b}$$

すなわち，図2の $(u,v),(u+du,v)$, $(u,v+dv),(u+du,v+dv)$ を頂点とする面積 $du\times dv$ の微小長方形は， xy 平面の $\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_udu$， $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_vdv,\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_udu+\boldsymbol{p}_vdv$ を頂点とする平行四辺形に近似的に写される．この

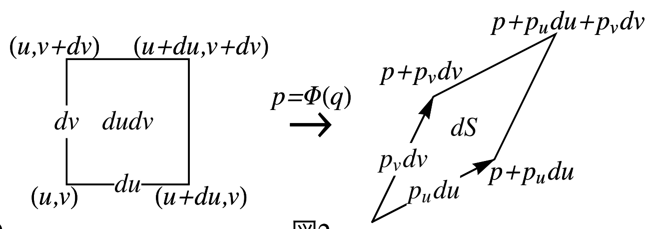


図2

平行四辺形の面積 dS は，ベクトル $\boldsymbol{p}_udu=(x_udu,y_udu),\boldsymbol{p}_vdv=(x_vdv,y_vdv)$ で決まり，

$$dS=|x_udu\cdot y_vdv-y_udu\cdot x_vdv|=|x_uy_v-y_ux_v|dudv \tag{c}$$

である．ゆえに求める面積倍率は

$$R(\boldsymbol{q})=\frac{dS}{dudv}=\frac{|x_uy_v-y_ux_v|dudv}{dudv}=|x_uy_v-y_ux_v|=\left|\det\begin{pmatrix}x_u&x_v\\y_u&y_v\end{pmatrix}\right|\cong|J(\boldsymbol{q})| \tag{d}$$

となる． $h,k\to 0$ の極限で， $\cong$ は $=$ となる． $J(\boldsymbol{q})=\det\begin{pmatrix}x_u&x_v\\y_u&y_v\end{pmatrix}$ は行列 $\begin{pmatrix}x_u&x_v\\y_u&y_v\end{pmatrix}$ の行列式で，変換 $\boldsymbol{\Phi}$ の**ヤコビアン**と言う．