微積分学II第12回 積分順序の交換

１．領域の表現

縦線領域，横線領域と言うのは，単に領域の表現法の区別に過ぎない．いくつかの領域を，縦線領域，横線領域の両方で表してみる．

［例1］ $D: x^2 \le y \le x, 0 \le x \le 1$ (図1)．縦線領域．図より

$$D: y \le x \le \sqrt{y}, 0 \le y \le 1$$

と横線領域に書ける． $x^2 \le y \Leftrightarrow x \le \sqrt{y}$ で下限関数 $y = x^2$ が上限関数 $x = \sqrt{y}$ と対応する．//

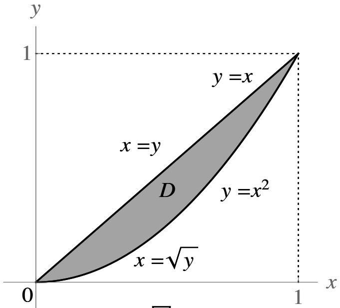


図1

［例2］ $D: 1 - y \le x \le 1 - y^2, 0 \le y \le 1$ (図2)．横線領域．図より，

$$D: 1 - x \le y \le \sqrt{1 - x}, 0 \le x \le 1$$

と縦線領域に書ける． $x \le 1 - y^2 \Leftrightarrow y \le \sqrt{1 - x}$ で上限関数 $x = 1 - y^2$ が上限関数 $y = \sqrt{1 - x}$ と対応する．例1と対応が逆である．これは，図を描かないとよく間違える．//

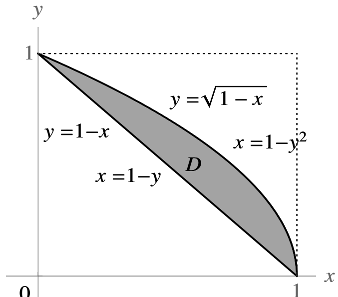


図2

［例3］ $D: (x - 1)^2 + y^2 \le 1$ (図3)．

まず，縦線領域として表す．図3より， $0 \le x \le 2$ ．不等式 $(x - 1)^2 + y^2 \le 1$ を y について解くと，

$$y^2 \le 1 - (x - 1)^2 \Leftrightarrow |y| \le \sqrt{1 - (x - 1)^2}$$
$$\Leftrightarrow -\sqrt{1 - (x - 1)^2} \le y \le \sqrt{1 - (x - 1)^2}.$$

ゆえに，

$$D: -\sqrt{1 - (x - 1)^2} \le y \le \sqrt{1 - (x - 1)^2}, 0 \le x \le 2 .$$

同様にして，横線領域として表すと，

$$D: 1 - \sqrt{1 - y^2} \le x \le 1 + \sqrt{1 - y^2}, -1 \le y \le 1 .\ //$$

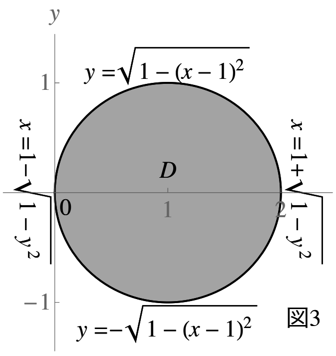


図3

［例4］ $D: x \le y \le 2x, 0 \le x \le 1$ ．縦線領域である．

図4より $0 \le y \le 2$ である．また， $0 \le y \le 1$ のときは $\frac{1}{2}y \le x \le y$ ， $1 \le y \le 2$ のときは $\frac{1}{2}y \le x \le 1$ である．ゆえに，2つの横線領域を

$$D_1: \frac{1}{2}y \le x \le y, 0 \le y \le 1, \quad D_2: \frac{1}{2}y \le x \le 1, 1 \le y \le 2$$

として， $D = D_1 \cup D_2$ である．

$D: \frac{1}{2}y \le x \le \min\{y, 1\}, 0 \le y \le 2$ と1つの横線領域で描けるが，関数 $x = \min\{y, 1\}$ は累次積分の計算に適さない．//

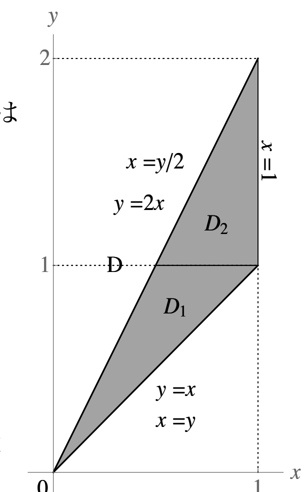


図4

［例5］ $D: 0 \le y \le x^2 + 1, -1 \le x \le 1$ (図5)．縦線領域である．

図のように，3つの横線領域

$$D_1: -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1,$$
$$D_2: -1 \le x \le -\sqrt{y-1}, 1 \le y \le 2,$$
$$D_3: \sqrt{y-1} \le x \le 1, 1 \le y \le 2$$

に分けられる．//

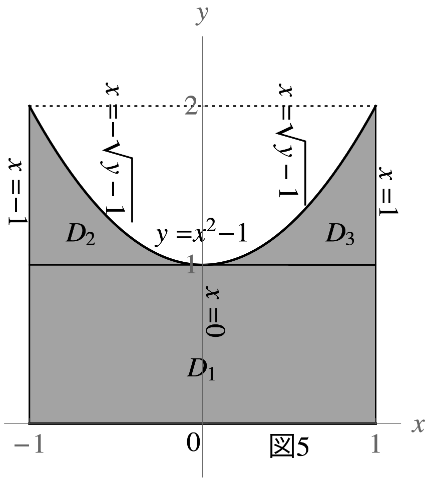


図5

2．積分順序の交換

累次積分 $\int_a^b \left(\int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$ は縦線領域 $D: p(x) \le y \le q(x), a \le x \le b$ 上の $f(x,y)$ の重積分である．

この領域 D を横線領域 $D: r(y) \le x \le s(y), c \le y \le d$ として表現し直せば，

$$\int_a^b \left(\int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{r(y)}^{s(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

である．これを累次積分における**積分順序の交換**という．

1節の例により，次のような交換が示せる．

・例1より，$\underbrace{\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy \right) dx}_{D:\, x^2 \le y \le x,\, 0 \le x \le 1} = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \underbrace{\int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx \right) dy}_{D: y \le x \le \sqrt{y},\, 0 \le y \le 1}$．

・例4より，$\underbrace{\int_0^1 \left(\int_x^{2x} f(x,y)\,dy \right) dx}_{D: x \le y \le 2x,\, 0 \le x \le 1} = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \underbrace{\int_0^1 \left(\int_{y/2}^{y} f(x,y)\,dx \right) dy}_{D_1: \frac{1}{2}y \le x \le y,\, 0 \le y \le 1} + \underbrace{\int_1^2 \left(\int_{y/2}^{1} f(x,y)\,dx \right) dy}_{D_2: \frac{1}{2}y \le x \le 1,\, 1 \le y \le 2}$．

第12回練習問題

(1) 領域 $D: 0 \le y \le 1-x, 0 \le x \le 1$ を図示し，$V = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x,y)\,dy \right) dx$ の積分順序を交換せよ．

(2) $V = \int_0^1 \left(\int_y^{e^y} x\,dx \right) dy$ と対応する重積分の積分領域 D を求め，作図せよ．また，積分順序を交換せよ．

第12回練習問題

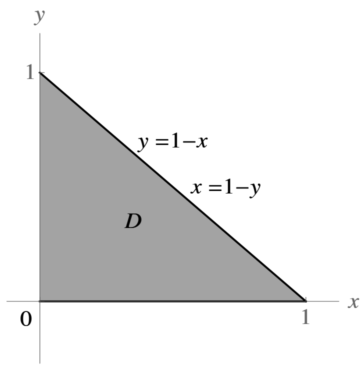
(1) 領域 $D: 0 \le y \le 1-x, 0 \le x \le 1$ を図示し， $V = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x,y)\,dy \right) dx$ の積分順序を交換せよ.

((2) $V = \int_0^1 \left(\int_y^{e^y} x\,dx \right) dy$ と対応する重積分の積分領域 D を求め，作図せよ．また，積分順序を交換せよ．

解答

(1) (配点5点)

a) 領域は右図．縦線領域．(2点．軸名，座標，領域名D，関数名等がなければ1点)



b) 横線領域で表し， $D: 0 \le x \le 1-y, 0 \le y \le 1$．(この式1点)

c) 積分順序を交換して，

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x,y)\,dy \right) dx = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} f(x,y)\,dx \right) dy. \quad //$$

(2点)

(2) (配点5点)

a) $D: y \le x \le e^y, 0 \le y \le 1$ (1点)

b) 領域は下図(2点．軸名，座標，領域名D，関数名等がなければ1点)

c) $D_1: 0 \le y \le x, 0 \le x \le 1$， $D_2: \log x \le y \le 1, 1 \le x \le e$ として， $D = D_1 \cup D_2$ (1点)

$$V = \iint_{D_1} x\,dx\,dy + \iint_{D_2} x\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^x x\,dy \right) dx + \int_1^e \left(\int_{\log x}^1 x\,dy \right) dx.$$ (1点)

d) 試しに計算すると，(計算しなくてよい．配点無し)

$$V_1 = \iint_{D_1} x\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^x x\,dy \right) dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

$$V_2 = \iint_{D_2} x\,dx\,dy = \int_1^e \left(\int_{\log x}^1 x\,dy \right) dx = \int_1^e x(1-\log x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4}(2\log x - 1) \right]_1^e$$

$$= \frac{e^2-1}{2} - \frac{e^2+1}{4} = \frac{e^2-3}{4}.$$

$$\therefore V = V_1 + V_2 = \frac{1}{12}(3e^2 - 5).$$