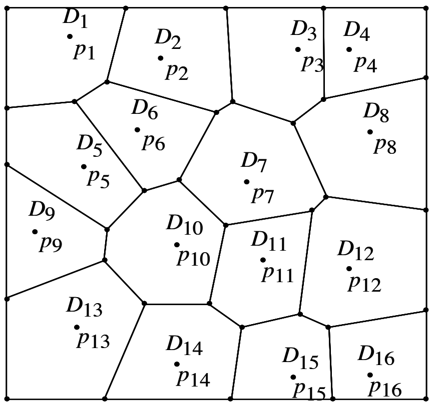
微積分学II第11回 重積分

1．重積分



2次元の領域 D の点 $p=(x,y)$ での物質の密度(質量/面積)が関数 $f(p)=f(x,y)$ で与えられたとき， D 内の物質の総量 V を求める問題を考える．

密度一定 ($f(p)=c\ (p\in D)$) のときには，領域の面積を $S(D)$ として，任意の代表点 $p\in D$ を取り，

$$V=f(p)S(D)=c\,S(D)$$

である．密度が一定でないときは， D を n 個の小領域 $D_i\ (1\le i\le n)$ に分割し，各小領域に代表点 $p_i\in D_i$ を定め， D_i 上の物質量を $f(p_i)S(D_i)$ で見積もる．ここで， $S(D_i)$ は D_i の面積である．そして，その総和により，

$$V_n=\sum_{i=1}^{n}f(p_i)S(D_i)\cong V \tag{1}$$

とする． $\cong$ は近似の意味． n を大きくし，分割を細かくすればするほど， V_n が V に近づくことが期待される．次の定理は，この期待に裏付けを与える．

［**定理**］ $f(x,y)$ は連続とする． D_i の最小外接円の半径を $r(D_i)$ とし， $R=\max\limits_{1\le i\le n}r(D_i)$ とする．このとき， $n\to\infty$ で $R\to 0$ となるように細分を進めるとき， $V=\lim\limits_{n\to\infty}V_n$ が存在する．また， $R\to 0$ となる全ての細分で，極限値 V は一致する．//

（説明） $f(x,y)$ は連続なので， R を小さくしてゆくと，密度 $f(p)$ の D_i 内のばらつきがほとんど0になる．ゆえに， $f(p_i)S(D_i)$ は D_i 内の物質量を次第に正確に表すようになるので，その総和 V_n は V に近づく． $n\to\infty$ は $R\to 0$ とするための手段である．//

この定理の極限値 V を

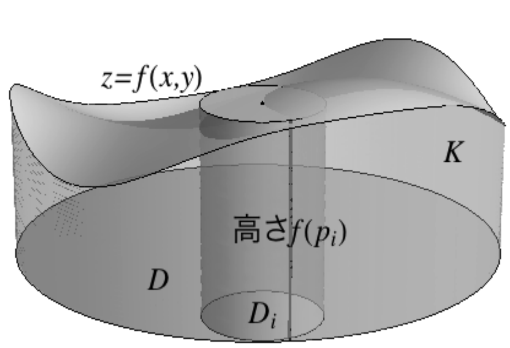
$$V=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(p_i)S(D_i) \tag{2}$$

と書き，領域 D 上の $f(x,y)$ の**重積分**という．

［**応用**］ $z=f(x,y)\ge 0$ のとき，

$$V=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

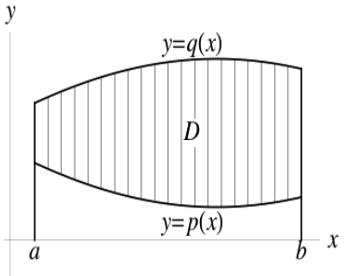
は座標空間で， D と曲面 $z=f(x,y)$ に挟まれた立体図形 $K=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D, 0\le z\le f(x,y)\}$ の体積を表す．//

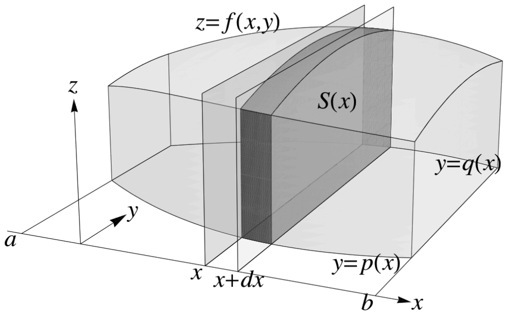


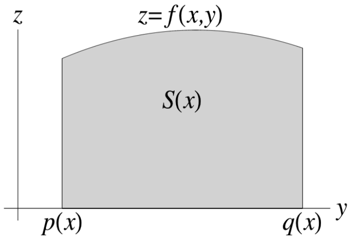
（説明）式(2)の総和の項 $f(p_i)S(D_i)$ は D_i を底面とする高さ $f(p_i)$ の柱の体積．それを集めた V_n の極限 V は K の体積である．//

２．重積分の計算法(累次積分)

○ 縦線領域での重積分







上左図の領域 $D: p(x) \le y \le q(x), a \le x \le b$ を**縦線領域**と呼ぶ．座標空間で D と曲面 $z = f(x,y)$ に挟まれた立体図形 K (上中図)を， x 軸上の点 $x, x+dx$ を通り x 軸に垂直な2枚の平面で切り，厚さ dx のスライスを作る．スライスの断面積 $S(x)$ (上右図)は

$$S(x) = \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)\,dy$$

となり，スライスの体積は $S(x)dx$．ゆえに， K の体積，すなわち， D での $f(x,y)$ の重積分について，次の公式を得る．

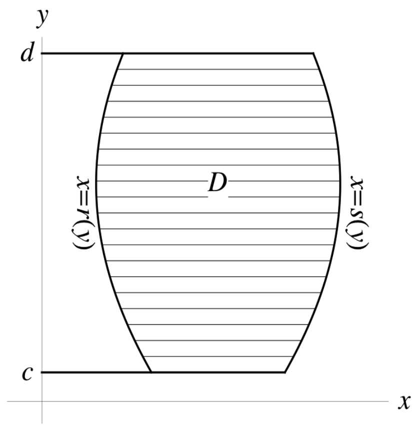
— 縦線領域 $D: p(x) \le y \le q(x), a \le x \le b$ における重積分 —

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

最右辺は1変数積分を繰り返すので，**累次積分**という．

注意！：<u>内側の積分では，</u> x <u>は定数として扱われる</u>.

○ 横線領域での重積分



右図の領域 $D: r(y) \le x \le s(y), c \le y \le d$ を**横線領域**と呼ぶ．縦線領域と同じく， D での $f(x,y)$ の重積分について，次の公式を得る．

— 横線領域 $D: r(y) \le x \le s(y), c \le y \le d$ における重積分 —

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{r(y)}^{s(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

第11回練習問題

(1) 縦線領域 $D: x \le y \le 2x, 0 \le x \le 1$ を図示し， $V = \iint_D xy\,dx\,dy$ の値を求めよ．

(2) 横線領域 $D: y \le x \le e^y, 0 \le y \le 1$ を図示し， $V = \iint_D x\,dx\,dy$ の値を求めよ．

授業資料 http://www.seto.nanzan-u.ac.jp/~sugiurah/ 質問メールなど sugiurah@nanzan-u.ac.jp

第11回練習問題

(1) 縦線領域 $D: x \le y \le 2x, 0 \le x \le 1$ を図示し， $V = \iint_D xy\,dx\,dy$ の値を求めよ．

(2) 横線領域 $D: y \le x \le e^y, 0 \le y \le 1$ を図示し， $V = \iint_D x\,dx\,dy$ の値を求めよ．

解答

(1) (配点5点)

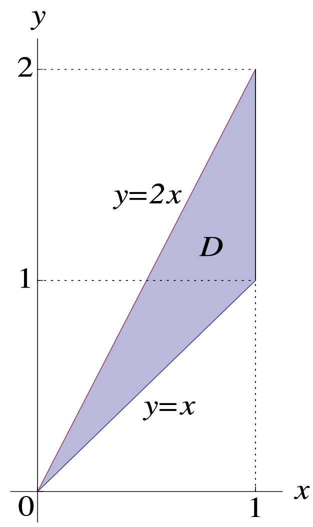
a) 領域は右図(2点．軸名，座標，領域名D等がなければ1点減点)

b) 公式により $V = \int_0^1 \left(\int_x^{2x} xy\,dy \right) dx$．(この式2点)

c) 計算すると，

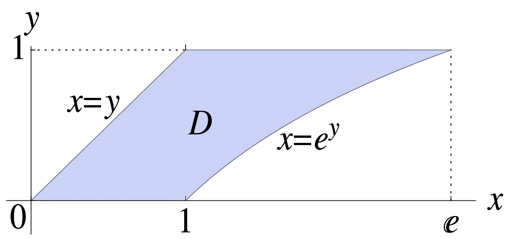
$$V = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_x^{2x} dx = \int_0^1 \left(2x^3 - \frac{1}{2}x^3 \right) dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x^3\,dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.//$$

(正解のみ1点)



(2) (配点5点)

a) 領域は右図(2点．軸名，座標，領域名D等がなければ1点減点)



b) 公式により $V = \int_0^1 \left(\int_y^{e^y} x\,dx \right) dy$．(この式2点)

c) 計算すると，

$$V = \int_0^1 \left(\int_y^{e^y} x\,dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_y^{e^y} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(e^{2y} - y^2 \right) dy = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2y} - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{1}{4}(e^2 - 1) - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}\left(3e^2 - 5 \right).$$

(正解のみ1点)