微積分学II第10回 陰関数定理

1．陰関数

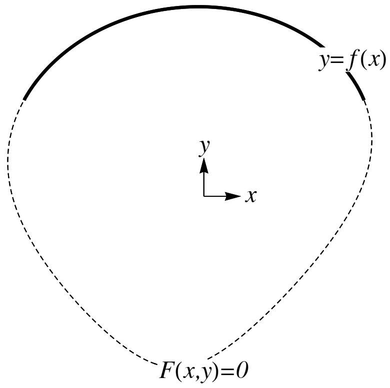
関数 $z=F(x,y)$ に対して， $F(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) の集合(0等高線)

$$C=\{(x,y)\,|\,F(x,y)=0\}$$

は通常，曲線を成す．曲線 C または C の一部分を表す方程式 $y=f(x)$ が陰関数である．言い換えれば，次の通り．

［陰関数］ $F(x,f(x))=0$ を満たす関数 $y=f(x)$ を $F(x,y)=0$ で定義される**陰関数**という．//

等高線F(x,y)=0と陰関数y=f(x)



［例1］陰関数の例

(1) $F(x,y)=x-y+1=0 \;\Rightarrow\; y=f(x)=x+1$,

(2) $F(x,y)=x^2+y^2-1=0 \;\Rightarrow\; y=f(x)=\pm\sqrt{1-x^2}$,

(3) $F(x,y)=x^2+y^2=0 \;\Rightarrow\; (x,y)=0$．陰関数は存在しない．//

［定理１］（陰関数定理：陰関数の存在と微分可能性）

関数 $F(x,y)$ は C^1 級で，点 (a,b) で $F(a,b)=0$ とする．このとき， $F_y(a,b)\neq 0$ なら， $x=a$ の近くで $F(x,y)=0$ の陰関数 $f(x)$ が存在して微分可能である．//

（証明） $F_y(a,b)>0$ とする($F_y(a,b)<0$ のときも同様)． $F_y(x,y)$ は連続なので，小さい $r>0$ をとれば (a,b) を中心とする半径 r の円板 D_r 内で $F_y(x,y)>0$ ．すなわち， $F(x,y)$ は y について単調増加である．以後の議論は全て円板 $(x,y)\in D_r$ 内で行う．

＜存在証明＞ y の関数 $F(a,y)$ は $F(a,b)=0$ かつ単調増加ゆえ， b_1,b_2 $(b_1<b<b_2)$ をとって， $F(a,b_1)<F(a,b)=0<F(a,b_2)$ とできる．

$x_1\cong a$ とする． $F(x,y)$ は連続で， $(x_1,b_1)\cong(a,b_1)$ ゆえ， $F(x_1,b_1)<0$ ．同じく， $F(x_1,b_2)>0$ ．

y の関数 $F(x_1,y)$ は単調増加ゆえ， $F(x_1,y)=0$ はただ一つの解 $y=y_1$ を持つ．これが $f(x_1)$ である．

＜微分可能性＞

$$y=f(x),\, f(x+h)=y+k$$

とおくと，テイラーの定理(第7回式(5))より， $\theta\,(0<\theta<1)$ が存在して，

$$F(x+h,f(x+h))=F(x+h,y+k)=F(x,y)+F_x(x+\theta h,y+\theta k)h+F_y(x+\theta h,y+\theta k)k\,.$$

$f(x)$ の定義より， $F(x+h,f(x+h))=F(x,f(x))=0$ を代入して，

$$F_x(x+\theta h,y+\theta k)h+F_y(x+\theta h,y+\theta k)k=0.\;\therefore \frac{k}{h}=-\frac{F_x(x+\theta h,y+\theta k)}{F_y(x+\theta h,y+\theta k)}$$

である．ゆえに，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{F_x(x+\theta h,y+\theta k)}{F_y(x+\theta h,y+\theta k)}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}. \qquad (1)$$

よって， $f(x)$ は微分可能．微係数は(1)で与えられる．//

２．陰関数の微分法

以下に，$F(x,f(x))=0$ を満たす陰関数 $y=f(x)$ の微分の計算法を与える．

—— $f'(x)$ の計算 ——

1) $F(x,y)=0$ の両辺を x で微分：$F_x(x,y)+F_y(x,y)y'=0$．(y が x の関数である事に注意!) (2)

2) 上式を y' について解く：$y'=-\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\dfrac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}$． (3)

——————————

—— $f''(x)$ の計算 ——

3) 式(2)の両辺を x で微分：$F_{xx}(x,y)+2F_{xy}(x,y)y'+F_{yy}(x,y)y'^2+F_y(x,y)y''=0$．

4) 上式を y'' について解き，式(3)を代入すると y'' が得られる．

——————————

具体的な計算では，$F_x,F_y,F_{xx},F_{xy},F_{yy}$ を明示しない．以下の例を見よ．

［例2］ $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ の陰関数 $y=f(x)$ の $(x,y)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ における y',y''．

1) $F(x,y)=0$ の両辺を x で微分：$2x+2y\,y'=0$． (4)

2) 上式を y' について解く：$y'=-\dfrac{x}{y}=-\dfrac{\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2}=1$． (5)

3) 式(4)の両辺を x で微分：$2+2(y'\,y'+y\,y'')=2(1+y'^2+y\,y'')=0$．

4) 上式を y'' について解き，(5)を代入：$y''=-\dfrac{1+y'^2}{y}=-\dfrac{1+(1)^2}{-\sqrt{2}/2}=2\sqrt{2}$．

［例3］例2の $y=f(x)$ の極値を求めよ．

a) $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ と $y'=-\dfrac{x}{y}=0$ を連立させて解くと，$(x,y)=(0,\pm1)$．

b-1) $(x,y)=(0,1)$ のとき，$y'=0,\ y''=-\dfrac{1+y'^2}{y}=-\dfrac{1+0}{1}=-1<0$ ゆえ，y 　は極大値．

b-2) $(x,y)=(0,-1)$ のとき，$y'=0,\ y''=-\dfrac{1+y'^2}{y}=-\dfrac{1+0}{-1}=1>0$ ゆえ，$y=-1$ は極小値．//

第10回練習問題

(1) $5x^2-6xy+5y^2-80=0$ の陰関数 $y=f(x)$ について $(x,y)=(3,5)$ における y',y'' を求めよ．

(2) $y=f(x)$ の極値を求めよ．

第10回練習問題

(1) $5x^2-6xy+5y^2-80=0$ の陰関数 $y=f(x)$ について $(x,y)=(3,5)$ における y',y'' を求めよ.

(2) $y=f(x)$ の極値を求めよ.

解答

(1) (配点5点)

1) $F(x,y)=0$ の両辺を x で微分：$10x-6(y+xy')+10yy'=10x-6y-(6x-10y)y'=0$.

すなわち, $$5x-3y-(3x-5y)y'=0 \qquad (1)$$

2) 上式を　について解く：$y'=\dfrac{5x-3y}{3x-5y}=\dfrac{15-15}{9-25}=0$. (2)

(計算ミスで y' が間違っているときは減点1．方法がおかしいときは減点3)

3) 式(1)の両辺を x で微分：

$$5-3y'-(3-5y')y'-(3x-5y)y''=5-6y'+5y'^2-(3x-5y)y''=0\ .$$

4) 上式を y'' について解き，(2)を代入：$y''=\dfrac{5-6y'+5y'^2}{3x-5y}=\dfrac{5}{-16}=-\dfrac{5}{16}$.

(計算ミスで y'' が間違っているときは減点1．方法がおかしいときは減点2)

(2) (配点5点)

a) $5x^2-6xy+5y^2-80=0\cdots$① と $y'=\dfrac{5x-3y}{3x-5y}=0\cdots$② を連立させて解く.

②より， $y=\dfrac{5}{3}x$．これを①に代入して，整理すると， $\dfrac{80}{9}x^2-80=0.\therefore x=\pm 3$．これを②に代入して， $(x,y)=(3,5),(-3,-5)$.

(計算ミスで (x,y) が間違っているときは減点1．方法がおかしいときは減点3)

b-1) $(x,y)=(3,5)$ のとき，前問より $y'=0, y''=-\dfrac{5}{16}<0$ ゆえ， $y=5$ は極大値.

(正解のみ1点)

b-2) $(x,y)=(-3,-5)$ のとき， $y'=0, y''=\dfrac{5-6y'+5y'^2}{3x-5y}=\dfrac{5}{16}>0$ ゆえ， $y=-5$ は極小値. //

(正解のみ1点)