微積分学II 第8回 まとめ

1．逆三角関数

1-1. 次の式を計算せよ．

(1) $\arcsin\dfrac{-1}{2}$　　(2) $\sin\left(\arctan\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right)$　　(3) $\dfrac{d}{dx}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right)$

1-2. 次の方程式を解け．

(1) $\arctan(2x-3) = \dfrac{\pi}{4}$　　(2) $\arcsin(2x) = \arccos\sqrt{x+1/2}$

2．テイラー展開

2-1. $f(x) = e^x$ の $x=1$ を中心とするテイラー展開を求めよ．

2-2. $f(x) = e^x$ について， $x=1$ を中心とするテイラーの公式を書け．

3．積分の基礎

3-1. 次の極限を求めよ．

(1) $L = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\dfrac{i}{n^2+3ni+2i^2}$　　(2) $L = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\sin\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi i}{n}$

3-2. 次の関数の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(1) $f(x) = \int_0^x \sin t\,dt$　　(2) $f(x) = \int_x^{2x} \sin t\,dt$　　(3) $f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt$

4．積分の計算

4-1. $f(x) = \dfrac{10}{(x+1)(x+2)(x^2+1)}$ とする．

(1) $f(x) = \dfrac{10}{(x+1)(x+2)(x^2+1)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2} + \dfrac{cx+d}{x^2+1}$ が成り立つように， a,b,c,d を定めよ．

(2) $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ を求めよ．

4-2. 次の不定積分を求めよ，

(1) $F(x) = \int \tan^2 x\,dx$ (変数変換 $t=\tan x$)　　(2) $F(x) = \int (\log x)^2\,dx$ (部分積分)

5．微分方程式

(1) $\dfrac{dx}{dt} = 3t^2x^3$ $(x(0)=2)$ を解け．　　(2) $\dfrac{dx}{dt} = 2x + e^t$ $(x(0)=0)$ を解け．

6．広義積分

(1) $I = \int_0^\infty \dfrac{10dx}{(x+1)(x+2)(x^2+1)}$　　(2) $I = \int_0^1 (\log x)^2\,dx$

7．連続型確率分布

ある海域に生息するシロナガスクジラの体長は，平均 $\mu = 24$ (m)，標準偏差 $\sigma = 4$ (m)の正規分布に従うと言う．この海域に 500 頭が棲息するとき，体長 32 (m)以上のものの予想頭数 n_{32} を求めよ．

正規分布表によれば， $p(u) = \int_0^u \varphi(t)dt$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ の代表的な値は以下の通り．

$p(0.5) = 0.1915$，$p(1) = 0.3413$，$p(1.5) = 0.4772$，$p(2) = 0.4772$，$p(2.5) = 0.4938$，$p(3) = 0.49865$

第8回解答

1．逆三角関数

1-1. (1) $\arcsin\frac{-1}{2}=-\frac{\pi}{6}$　(2) $\sin\left(\arctan\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)=\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

(3) $\frac{d}{dx}\left(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}+\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}=2\sqrt{1-x^2}$

1-2. (1) $2x-3=\tan\frac{\pi}{4}=1$. $x=2$. (2) $y=\arcsin(2x)=\arccos\sqrt{x+1/2}$ と置くと，主値の条件より $0\le y\le\frac{\pi}{2}\cdots$

①．また，$2x=\sin y$, $\sqrt{x+1/2}=\cos y$ より $4x^2+x+1/2=\sin^2 y+\cos^2 y=1$． $x=-\frac{1}{2},\frac{1}{4}$．①より $x=\frac{1}{4}$．

2．テイラー展開

2-1．$f^{(k)}(x)=e^x, f^{(k)}(1)=e\,(k\ge 0)$ より，$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e}{k!}(x-1)^k$．

2-2．$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-1)^n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e}{k!}(x-1)^k+\frac{e^c}{n!}(x-1)^n$． c は1と x の内分点である.

3．積分の基礎

3-1. (1) $L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\frac{i}{n}}{1+3\frac{i}{n}+2\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{x}{1+3x+2x^2}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx=\left[\frac{1}{2}\log\frac{(x+1)^2}{|2x+1|}\right]_0^1=\frac{1}{2}\log\frac{4}{3}$.

(2) $L=\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\frac{\pi i}{n}\right)=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(1/n)}{1/n}\right)\times\int_0^1\sin\pi x\,dx=1\times\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}$.

3-2. 次の関数の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(1) $f'(x)=\sin x$　(2) $f'(x)=2\sin 2x-\sin x$　(3) $f'(x)=e^{-(\sqrt{x})^2}(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}$

4．積分の計算

4-1. (1) $a=5, b=-2, c=-3, d=1$.　(2) $F(x)=\log\left|\frac{(x+1)^5}{(x+2)^2(x^2+1)^{3/2}}\right|+\arctan x+\log 4$.

4-2. 次の不定積分を求めよ,

(1) $F(x)=-x+\tan x$　(2) $F(x)=x(\log x)^2-2x\log x+2x$

5．微分方程式

(1) $x=\frac{2}{\sqrt{1-8t^3}}$.　(2) $x(t)=-e^t+e^{2t}=e^t(e^t-1)$.

6．広義積分

(1) $I=\lim_{x\to\infty}F(x)=\frac{\pi}{2}+\log 4$　(問4-1(2))　(2) $I=\int_0^1(\log x)^2\,dx=2$　(問4-2(2))

7．連続型確率分布

$u=\frac{32-\mu}{\sigma}=\frac{32-24}{4}=2$ より，$n_{32}=500\times P(X\ge 32)=500\times(p(\infty)-p(2))=500\times(0.5-0.4772)=11.4$.