微積分学II 第7回 積分の応用

1．連続型確率変数

区間 $[\alpha,\beta]$ 上の連続的な値を取る確率変数 X を**連続型確率変数**という． X が $a \le X \le b$ を満たす確率を

$$P(a \le X \le b)$$

と書く．関数 $f(x) \ge 0$ により，

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

と書けるとき， $f(x)$ を X の**密度関数**という(微少区間 $dI = (x, x+dx)$ に X が入る確率 $f(x)dx$)．原始関数

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$$

を X の**分布関数**という．

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$$

である．

☆ $f(x) \ge 0,\ \int_\alpha^\beta f(x)dx = 1$．

［例1］ $f(x) = A(1-x^2)$ が $[-1,1]$ の密度関数となる様に A を定めよ．そのとき， $P\left(0 \le X \le \frac{1}{2}\right)$ を求めよ．

（解） $\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 A(1-x^2)dx = A\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}A = 1$ より， $A = \frac{3}{4}$．

$$P\left(0 \le X \le \frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} f(x)dx = \int_0^{1/2} \frac{3}{4}(1-x^2)dx = \frac{3}{4}\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{1/2} = \frac{11}{32}.$$

可積分関数 $g(x)$ $(\alpha \le x \le \beta)$ を考える． X の値が x となったときの利得が $g(x)$ とみなす．

△ **期待値**： $E\{g(X)\} = \int_\alpha^\beta g(x)f(x)dx$．たくさん試行を繰り返したときの $g(X)$ の平均．

（解説）微少区間 $dI = (x, x+dx)$ に X が入る確率 $f(x)dx$ とそのときの利得 $g(x)$ を掛けて積分(総和)した．

△ X の**平均**： $\mu = \int_\alpha^\beta xf(x)dx = E(X)$　($g(x) = x$ の期待値)．

△ X の**分散**： $\sigma^2 = \int_\alpha^\beta (x-\mu)^2 f(x)dx = E\left\{(X-\mu)^2\right\}$　($g(x) = (x-\mu)^2$ の期待値，平均からの散らばり具合)．

△ X の**標準偏差**： $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = E\left\{(X-\mu)^2\right\}^{1/2}$．

2．正規分布

△ 平均 μ 分散 σ^2 の**正規分布** $N(\mu,\sigma^2)$ ：密度関数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$　$(-\infty < x < \infty)$ の分布．

△ **標準正規分布** $N(0,1)$ ：密度関数 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$　$(-\infty < x < \infty)$ の分布．

＜正規分布に関する基本定理＞

☆1　X が正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従う確率変数であるとき，平均 $E(X) = \mu$，分散 $E\{(X-\mu)^2\} = \sigma^2$ である．

（定義通り計算すると，確かに平均 μ 分散 σ^2 となること．）

☆2 X が正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従う確率変数であるとき， $u_1=(x_1-\mu)/\sigma, u_2=(x_2-\mu)/\sigma$ とすると，

$$P(x_1 \le X \le x_2)=\int_{u_1}^{u_2}\varphi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u_1}^{u_2}e^{-t^2/2}\,dt=p(u_2)-p(u_1).$$

$$p(u)=\int_0^u \varphi(x)dx \text{ は } \varphi(x) \text{ の原始関数.}$$

△ **正規分布表：** 原始関数 $p(u)=\int_0^u \varphi(x)dx\ \ (u \ge 0)$ の表.

（ $p(-u)=p(u)$ なので， $u \ge 0$ のみの表で十分．）

［例2］ X が正規分布 $N(\overbrace{50}^{\mu},\overbrace{100}^{\sigma^2})$ に従う確率変数であるとき， $P(60 \le X \le 70), P(40 \le X \le 60)$ を求めよ.

（解）平均と標準偏差は $\mu=50, \sigma=\sqrt{100}=10$ である.

$$\frac{40-\mu}{\sigma}=-1, \frac{60-\mu}{\sigma}=1, \frac{70-\mu}{\sigma}=2, \frac{\infty-\mu}{\sigma}=\infty$$

であるから，

$$\begin{aligned}
&P(60 \le X \le 70)=p(2)-p(1)=0.4772-0.3413=0.1359,\\
&P(40 \le X \le 60)=p(1)-p(-1)=p(1)+p(1)=0.6826,\\
&P(X \ge 40) \qquad =P(40 \le X < \infty)=p(\infty)-p(-1)=0.5+p(1)=0.8413.
\end{aligned}$$

３．２次元の分布

［例3］三角形 $D=\{(x,y)\,|\,x \ge 0, y \ge 0, x+y \le 1\}$ の点をランダムに選ぶ確率変数を (X,Y) とする． $Z=X+Y$ の(1) 分布関数 $F(z)=P(Z \le z)$，(2) 密度関数 $f(z)$，(3) 平均 $\mu=E(Z)$ と分散 $\sigma^2=E\{(Z-\mu)^2\}$ を求めよ.

（解）まずランダムの意味を(適当に)定める．ここでは， (X,Y) の分布を次のように決める． D の部分 A の面積を $S(A)$ とするとき， $P\big((X,Y)\in A\big)=S(A)/S(D)$ とする.

(1) $x+y \le z$ を満たす点 $(x,y)\in D$ は部分 $A=\{(x,y)\,|\,x \ge 0, y \ge 0, x+y \le z\}$ に属す． $S(D)=\frac{1}{2}$, $S(A)=\frac{1}{2}z^2$ だから， $F(z)=P(Z \le z)=P\big((X,Y)\in A\big)=S(A)/S(D)=z^2$．分布関数は $F(z)=z^2\ \ (0 \le z \le 1)$ である.

(2) (1)より，密度関数は $f(z)=F'(z)=2z$ である.

(3) (2)より，平均 $\mu=\int_0^1 zf(z)dz=\int_0^1 2z^2\,dz=\frac{2}{3}$．分散 $\sigma^2=\int_0^1(z-\mu)^2 f(z)dz=\int_0^1 2z(z-\frac{2}{3})^2\,dz=\frac{1}{18}$．

第7回練習問題

単位円板 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \le 1\}$ の点をランダムに選ぶ確率変数を (X,Y) とする． D の部分 A の面積を $S(A)$ とするとき， $P\big((X,Y)\in A\big)=S(A)/S(D)$ とする.

$Z=X+Y$ の(1) 分布関数 $F(z)=P(Z \le z)$，(2) 密度関数 $f(z)$，(3) 平均 $\mu=E(Z)$ と分散 $\sigma^2=E\{(Z-\mu)^2\}$ を求めよ.

Q.E.D(Quod Erat Demonstrandum=Which had to be demonstrated)：示されるべき事は以上.

第7回練習問題

単位円板 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ の点をランダムに選ぶ確率変数を (X,Y) とする． D の部分 A の面積を $S(A)$ とするとき， $P\big((X,Y)\in A\big)=S(A)/S(D)$ とする．

$Z=X+Y$ の(1) 分布関数 $F(z)=P(Z\le z)$ （4点），(2) 密度関数 $f(z)$ （4点），(3) 平均 $\mu=E(Z)$ （1点）と分散 $\sigma^2=E\{(Z-\mu)^2\}$ （1点）を求めよ．

解答

(1) 分布関数 $F(z)=P(Z\le z)$ （4点）

部分 $A=\{(x,y)\mid x+y\le z, x^2+y^2\le 1\}$ の面積は

$$S(A)=2\int_{-1}^{z/\sqrt{2}}\sqrt{1-t^2}\,dt=\left[\sin^{-1}t+t\sqrt{1-t^2}\right]_{-1}^{z/\sqrt{2}}=\sin^{-1}\frac{z}{\sqrt{2}}+\frac{z}{2}\sqrt{2-z^2}+\frac{\pi}{2}.$$

ゆえに，

$$F(z)=S(A)/S(D)=S(A)/\pi=\frac{1}{2\pi}\left(2\sin^{-1}\frac{z}{\sqrt{2}}+z\sqrt{2-z^2}+\pi\right).\quad\cdots①$$

(2) 密度関数 $f(z)$ （4点）

公式 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^{g(x)}f(t)dt=f(g(x))g'(x)$ より， $f(z)=F'(z)=\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{\pi}S(A)\right)=\dfrac{2}{\pi\sqrt{2}}\sqrt{1-\dfrac{z^2}{2}}=\dfrac{1}{\pi}\sqrt{2-z^2}$.

または，①の右辺を微分して， $f(z)=F'(z)=\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-z^2/2}}+\dfrac{\sqrt{2-z^2}}{2}-\dfrac{z^2}{2\sqrt{2-z^2}}\right)=\dfrac{1}{\pi}\sqrt{2-z^2}$.

(3) 平均 $\mu=E(Z)$ （正解のみ1点）

図より， $-\sqrt{2}\le Z\le\sqrt{2}$ であるから，

$$\mu=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}zf(z)dz=\frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}z\sqrt{2-z^2}\,dz=0.$$

最後の等式は， $z\sqrt{2-z^2}$ が奇関数であることによる．

(4) 分散 $\sigma^2=E\{(Z-\mu)^2\}$ （正解のみ1点）

$\mu=0$ より，

$$\sigma^2=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}z^2f(z)dz=\frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}z^2\sqrt{2-z^2}\,dz$$

である．変数変換 $z=\sqrt{2}\sin t$ により， $dz=\sqrt{2}\cos t\,dt,\sqrt{2-z^2}=\sqrt{2}\cos t,$ $\begin{array}{c|ccc} z & -\sqrt{2} & \to & \sqrt{2} \\ \hline t & -\pi/2 & \to & \pi/2\end{array}$ ．よって，

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}z^2\sqrt{2-z^2}\,dz=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(2\sin^2 t\right)\left(\sqrt{2}\cos t\right)\sqrt{2}\cos t\,dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}dt=\frac{\pi}{2}$$

である．最後から2番目の等式は $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 4t\,dt=0$ ($\cos 4t$ の周期は $\pi/2$)による．ゆえに， $\sigma^2=\dfrac{1}{2}$.