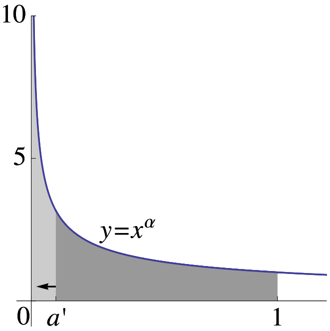
微積分学I 第6回 広義積分

1．広義積分

△ 通常の定積分： $I=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$． $f(x)$ の定義域は $\boxed{x\in[a,b]}$．

△ **広義積分**　： $\tilde{I}=\int_a^b f(x)dx=\lim_{b'\to b-0}F(b')-\lim_{a'\to a+0}F(a')$． $f(x)$ の定義域は $\boxed{x\in(a,b)}$．

広義積分は， $f(a)$ や $f(b)$ が定義されないときに有効．定義されていれば， $\lim_{a'\to a+0}F(a')$ や $\lim_{b'\to b-0}F(b')$ をそれぞれ $F(a)$, $F(b)$ で置き換える．原始関数数値．

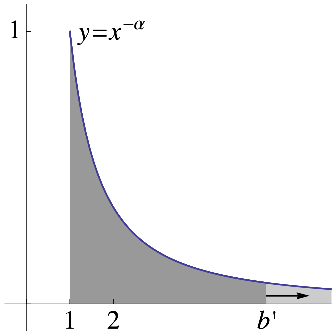


［**例1**］ $f(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}$, $F(x)=\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ $(x\in(0,1])$, $0<\alpha<1$ のとき，通常の定積分 $I=\int_0^1 f(x)dx$ は存在しない．区分求積法によれば，

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i\ge\lim_{n\to\infty}f(x_1)\Delta x_1$$

であり，右辺は x_1 を0に急接近させれば ∞ に発散するからである．広義積分 $\tilde{I}$ は存在． $b=1$ は閉端ゆえ，

$$\tilde{I}=\underbrace{F(1)}_{\textbf{原始関数直}}-\lim_{a'\to+0}F(a')=\frac{1}{1-\alpha}-\lim_{a'\to+0}\frac{a'^{1-\alpha}}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}-0=\frac{1}{1-\alpha}．\ //$$



［**例2**］ $f(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}$,$F(x)=\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ $(x\in[1,\infty))$, $\alpha>1$ のとき，通常の定積分 $I=\int_1^\infty f(x)dx$ は存在しない．近似積分 $\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$ が， $\Delta x_n=\infty$ となるため計算できないからである．広義積分 $\tilde{I}$ は存在． $a=1$ は閉端ゆえ，

$$\tilde{I}=\lim_{b'\to\infty}F(b')-\underbrace{F(1)}_{\textbf{原始関数直}}=\lim_{b'\to\infty}\frac{b'^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}=0-\frac{1}{1-\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}．\ //$$

例1, 2を少し一般化してまとめると次の表となる．

$0<a<b$ のとき，

	$0<\alpha<1$	$\alpha=1$	$\alpha>1$
$\int_a^b\dfrac{1}{(x-a)^\alpha}dx$	$\dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$	発散	発散
$\int_a^\infty\dfrac{1}{x^\alpha}dx$	発散	発散	$\dfrac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}$

2．広義積分可能性

［**定理1**］区間 (a,b) の連続関数 $f(x),g(x)$ が $0\le|f(x)|\le g(x)$ を満たすとき，次が成立する． $a=-\infty$, $b=\infty$ でもよい．

(1) 広義積分 $\int_a^b g(x)dx$ が収束(値を持つ)　⇒　広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ が収束．

(2) 広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ が発散(値を持たない)　⇒　広義積分 $\int_a^b g(x)dx$ が発散．//

［**例3**］広義積分 $\tilde{I}=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$ は収束を示す．$0<x\le\frac{\pi}{2}$ において，$0<\frac{2}{\pi}x\le\sin x$ が成立するので，

$0<\frac{1}{\sqrt{\sin x}}\le\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}=:g(x)$．$\int_0^{\pi/2}g(x)dx$ は収束するので，定理1より $\tilde{I}$ も収束．//

［**例4**］広義積分 $\tilde{I}=\int_0^{\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^5}}dx$ の発散を示す．$x>0$ で，$1+x^5<(1+x)^5$，$x=(1+x)-1$ より，

$\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^5}}>\frac{(1+x)-1}{\sqrt[3]{(1+x)^5}}=\frac{1}{(1+x)^{2/3}}-\frac{1}{(1+x)^{5/3}}=:g(x)$．$\int_0^{\infty}g(x)dx$ は発散する．定理1より $\tilde{I}$ も発散．//

３．Γ関数

△ ガンマ関数：$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-x}\,dx\quad(s>0)$

右辺の収束を示す．$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-x}\,dx=\int_0^{1}x^{s-1}e^{-x}\,dx+\int_1^{\infty}x^{s-1}e^{-x}\,dx=\tilde{I}_1+\tilde{I}_2$ とする．

(i) $0<x\le 1$ で，$x^{s-1}e^{-x}\le x^{s-1}$．広義積分 $\int_0^1 x^{s-1}dx$ は収束するので，$\tilde{I}_1$ も収束．

(ii) $x\ge 1$ のとき，整数 $n\ge s+1$ を取ると，$\frac{x^n}{n!}\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$ より，$e^{-x}\le\frac{n!}{x^n}\le\frac{n!}{x^{s+1}}$．よって，

$x^{s-1}e^{-x}\le x^{s-1}\frac{n!}{x^{s+1}}=\frac{n!}{x^2}$．広義積分 $\int_1^{\infty}\frac{n!}{x^2}dx$ は収束するので，$\tilde{I}_2$ も収束．

以上(i), (ii)より，広義積分 $\int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-x}\,dx$ は収束．

☆1 $\boxed{\Gamma(n+1)=n!}$ $(n=0,1,2,\cdots)$．// ガンマ関数は階乗の実数への拡張．

（証明）n に関する帰納法．$n=0$ のとき，$\Gamma(n+1)=\Gamma(1)=\int_0^{\infty}e^{-x}\,dx=1=0!$．さて，$n\ge 1$ で

$\Gamma(n+1)=\int_0^{\infty}x^n e^{-x}\,dx=n!$ が成立したとすると，部分積分により，

$$\Gamma(n+2)=\int_0^{\infty}x^{n+1}e^{-x}\,dx=\underbrace{\Big[x^{n+1}(-e^{-x})\Big]_0^{\infty}}_{=0-0=0}-\int_0^{\infty}(n+1)x^n(-e^{-x})dx=(n+1)\Gamma(n+1)=(n+1)n!=(n+1)!$$

ゆえに，全ての n で与式が成立．//

第6回練習問題

次の広義積分を求めよ．まず，不定積分 $F(x)$ を求めること．

(1) $\tilde{I}=\int_0^1 x\log x\,dx$　　(2) $\tilde{I}=\int_0^{\infty}xe^{-x^2}\,dx$

Q.E.D(Quod Erat Demonstrandum=Which had to be demonstrated)：示されるべき事は以上．

第6回練習問題

次の広義積分を求めよ．まず，不定積分 $F(x)$ を求めること．

(1) $\tilde{I}=\int_0^1 x\log x\,dx$ （5点）　　(2) $\tilde{I}=\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$ （5点）

解答

（1）

1) 不定積分（2点）

部分積分により，

$$F(x)=\int x\log x\,dx=\frac{1}{2}x^2\log x-\int\frac{1}{2}x^2x^{-1}\,dx=\frac{1}{4}x^2(2\log x-1).$$

2) 広義積分（3点）

$x=1$ で被積分関数は連続， $x=0$ で未定義なので， $\tilde{I}=F(1)-\lim_{x\to+0}F(x)$.

$$F(1)=-\frac{1}{4},\ \lim_{x\to+0}F(x)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{4}x^2(2\log x-1)=\lim_{x\to+0}\frac{2\log x-1}{4x^{-2}}\overset{L}{=}\lim_{x\to+0}\frac{2x^{-1}}{-8x^{-3}}=\lim_{x\to+0}\frac{-x^2}{4}=0$$

より， $\tilde{I}=-\frac{1}{4}$.

（2）

1) 不定積分（2点）

$t=x^2$ により， $dt=2xdx$ ， $\begin{array}{c|ccc} t & 0 & \to & \infty \\ \hline x & 0 & \to & \infty \end{array}$ であるから，

$$F(x)=\int xe^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int e^{-t}\,dt=-\frac{1}{2}e^{-t}=-\frac{1}{2}e^{-x^2}.$$

2) 広義積分（3点）

$x=0$ で被積分関数は連続なので， $\tilde{I}=\lim_{x\to\infty}F(x)-F(0)$.

$$F(0)=-\frac{1}{2},\ \lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to+0}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)=0$$

より， $\tilde{I}=\frac{1}{2}$.