

微積分学II 第5回 微分方程式

1. 微分方程式

x を実数 t の関数 $x = x(t)$ とする. $x(t)$ を未知関数とする

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (1.1)$$

のような方程式を**微分方程式 (常微分方程式)** と言う. x が t の関数であることを自明として,

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1.2)$$

と書くこともある.

一本の道路を数直線と見なす. t を時間, $x(t)$ を車の位置とすると, $x'(t)$ は車の速度である. 道路には制限速度があり, 車はその制限速度で走ることとする. 方程式

$$x'(t) = f(t) \quad (1.3)$$

は制限速度が時間で決まっていることを示す微分方程式. また, 方程式

$$x'(t) = f(x(t)) \quad (1.4)$$

は制限速度が場所で決まっていることを示す微分方程式. 方程式(1.1)は, 制限速度が場所と時間で決まるという, 一般的な状況を表している(上図).

方程式(1.3)は, 時刻 a を決めて, 両辺を a から t まで積分し,

$$x(t) = \int_a^t f(s) ds + x(a) \quad (1.5)$$

のように解ける. ただし, 時刻 a における車の位置 $x(a) = b$ が必要である. 条件

$$x(a) = b \quad (1.6)$$

を微分方程式の**初期条件**と言う. 初期条件を満たす解を求める問題を**初期値問題**という.

2. 変数分離形の解法

微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x) \quad (2.1)$$

を**変数分離形**という. この解法を考えよう.

<一>一般解: $g(x(t)) \neq 0$ のとき

両辺で $g(x)$ で割って,

$$\frac{1}{g(x)} \frac{dx}{dt} = f(t). \quad (2.2)$$

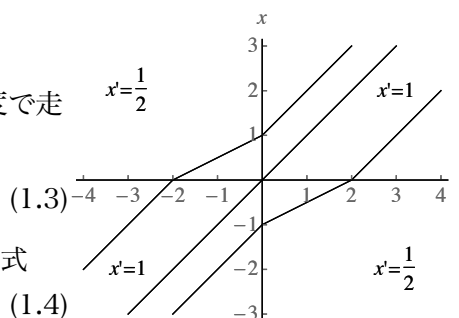
両辺を t で積分して,

$$\int \frac{1}{g(x)} \frac{dx}{dt} dt = \int f(t) dt + C. \quad (2.3)$$

$x = x(t)$ は t の関数だから, 置換積分の公式より,

$$\int \frac{1}{g(x)} dx = \int \frac{1}{g(x(t))} x'(t) dt = \int \frac{1}{g(x)} \frac{dx}{dt} dt = \int f(t) dt + C \quad (2.4)$$

である. 見やすくするために, $G(x) = \int \frac{1}{g(x)} dx, F(t) = \int f(t) dt$ と書けば,



$$G(x) = F(t) + C \quad (2.5)$$

である。この方程式を x について解いて、 t における x の値 $x(t)$ が決まる。得られる解 $x(t)$ は任意定数 C を含む。このように任意定数を含む解を**一般解**と呼ぶ。

式(2.1)から(2.4)への変形は次のように形式的（代数的）に書ける。

$$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x) \xrightarrow{1} \frac{dx}{g(x)} = f(t)dt \xrightarrow{2} \int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)dt$$

$\xrightarrow{1}$ の後、変数 x, t は等号を挟んで左右に分離される。これが**変数分離**の名の由来である。

<特>特殊解： $g(x(t))=0$ のとき

$x(t)$ は x に関する方程式 $g(x)=0$ の解である。方程式 $g(x)=0$ の解の一つを $x=\alpha$ とし、定数関数 $x(t)=\alpha$ とする。このとき、 $x'(t)=0, f(x)g(x)=f(x)g(\alpha)=0$ であるから、 $x(t)=\alpha$ は微分方程式(2.1)を満たす解である。このように任意乗数を含まない解を**特殊解**と呼ぶ。

変数分離型の解法は、以下のようにまとめられる。

——ポイント 1——

<一> 一般解：

(1) 変数分離する：
$$\frac{dx}{g(x)} = f(t)dt$$

(2) 両辺を積分：
$$G(x) = \int \frac{1}{g(x)} dx = \int f(t)dt + C = F(t) + C$$

(3) 方程式を x に関して解く。

<特> 特殊解：

(1) 方程式 $g(x)=0$ の解 $x=\alpha$ （複数かもしれない）を求める。

(2) 定数関数の解 $x(t)=\alpha$ を得る。

[注意] <2>の特殊解を<1>の一般解に含めることが出来る場合がある（例1）。

[例1] 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = tx \quad (2.6)$$

の一般解を求めよ。この問題では、 $f(t)=t, g(x)=x$ である。

<1> 一般解：

(1) 変数分離する：
$$\frac{dx}{x} = tdt$$

(2) 両辺を t で積分：
$$\int \frac{dx}{x} = \int t dt + C$$

両辺の積分を求めると、

$$\log|x| = \frac{1}{2}t^2 + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

である。これを x について解くと、

$$|x| = e^{t^2/2+C} = e^C e^{t^2/2}. \therefore x = \pm e^C e^{t^2/2}.$$

となる。符号 \pm と C を任意に選んで解 $x=x(t)$ が定まる。 $\pm e^C$ を改めて C と置くと、解は

$$x(t) = C e^{t^2/2} \quad (C \text{ は } 0 \text{ 以外の任意定数}) \quad (2.7)$$

と書ける.

< 2 > 特殊解:

(1) $g(x)=0$ を解いて, $x=0$.

(2) 定数関数の解 $x(t)=0$ を得る.

この解は, 一般解(2.7)で $c=0$ と置いたものに等しい. この解を一般解に含めてやれば, 微分方程式の一般解は

$$x(t) = C e^{t^2/2} \quad (C \text{ は任意定数}) \quad (2.8)$$

である.

[例2] 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad (a : \text{定数}) \quad (2.9)$$

の一般解を求めよ. この問題では, $f(t)=a, g(x)=x$ である.

例1と同様にして一般解

$$x(t) = C e^{at} \quad (C \text{ は任意定数}) \quad (2.10)$$

が得られる. これは, 公式として憶えておくと良い.

3. 定数変化法

微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = ax + g(t) \quad (a : \text{定数}) \quad (3.1)$$

の解法を考える. これは, (2.9)を一般化したものである.

新たな未知関数 $y(t)$ を導入し,

$$x(t) = y(t)e^{at} \quad (3.2)$$

が解であると仮定する. これは(2.10)の定数 C を変化する関数 $y(t)$ で置き換えたものである. これが定数変化法の名の由来である. これを(3.1)に代入して整理すると,

$$\frac{dx}{dt} - (ax + g(t)) = y'(t)e^{at} + ay(t)e^{at} - (ay(t)e^{at} + g(t)) = y'(t)e^{at} - g(t) = 0.$$

これより, $y'(t)e^{at} = g(t)$, すなわち, $y'(t) = g(t)e^{-at}$. ゆえに,

$$y(t) = \int g(t)e^{-at} dt + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad (3.3)$$

である. これを(3.2)に代入して, 一般解

$$x(t) = C e^{at} + e^{at} \int g(t)e^{-at} dt \quad (C \text{ は任意定数}) \quad (3.4)$$

が得られる. 以上を纏めると,

——ポイント2——

微分方程式 $\frac{dx}{dt} = ax + g(t)$ の一般解は,

$$x(t) = C e^{at} + e^{at} \int g(t)e^{-at} dt \quad (C \text{ は任意定数}).$$

[例 3] 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -2x + \cos t \quad (3.5)$$

の一般解を求めよ.

方程式(3.1)で $a = -2, g(t) = \cos t$ としたものである. 一般解は式(3.4)で与えられるので,

$$x(t) = Ce^{-2t} + e^{-2t} \int e^{2t} \cos t dt. \quad (3.6)$$

教科書p.70の公式

$$\int e^{at} \cos bt dt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2} (a \cos bt + b \sin bt) \quad (3.7)$$

により(3.6)の積分項を計算すると, 一般解は,

$$x(t) = Ce^{-2t} + e^{-2t} \frac{e^{2t}}{5} (2 \cos t + \sin t) = Ce^{-2t} + \frac{2 \cos t + \sin t}{5} \quad (3.8)$$

となる. //

第5回練習問題

1. 次の微分方程式の全ての解を求めよ (変数分離形: ポイント 1).

(1) $\frac{dx}{dt} = tx^2$

(2) $\frac{dx}{dt} = x^2 - 1$

(3) $\frac{dx}{dt} = \sqrt{1-x^2}$

(4) $\frac{dx}{dt} = (2-x)(3-x)$

2. 次の微分方程式の一般解を求めよ (ポイント 2).

(1) $\frac{dx}{dt} = 3x + t$

(2) $\frac{dx}{dt} = x + \sin t$

(3) $\frac{dx}{dt} = 2x + e^{-t}$

(4) $\frac{dx}{dt} = -x + e^{-t}$

第5回練習問題

1. 次の微分方程式の全ての解を求めよ (変数分離形: ポイント1).

$$(1) \frac{dx}{dt} = tx^2$$

$$(2) \frac{dx}{dt} = x^2 - 1$$

$$(3) \frac{dx}{dt} = \sqrt{1-x^2}$$

$$(4) \frac{dx}{dt} = (2-x)(3-x)$$

2. 次の微分方程式の一般解を求めよ (ポイント2).

$$(1) \frac{dx}{dt} = 3x+t$$

$$(2) \frac{dx}{dt} = x + \sin t$$

$$(3) \frac{dx}{dt} = 2x + e^{-t}$$

$$(4) \frac{dx}{dt} = -x + e^{-t}$$

解答

1. (1) **配点3点 一般解2点特殊解1点を正解のみに与える.**

<一>変数分離して, $\frac{dx}{x^2} = tdt$. これを両辺積分して, $\int \frac{dx}{x^2} = \int tdt + c$ (c は積分定数).

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}, \quad \int tdt = \frac{1}{2}t^2$$

を代入して, $-\frac{1}{x} = \frac{1}{2}t^2 + c$. これを x について解いて, 一般解は

$$x(t) = -\frac{2}{t^2 + 2c} = -\frac{2}{t^2 + C}.$$

ここで, $C = 2c$ は任意定数である.

<特>方程式 $x^2 = 0$ の解 $x = 0$. これより, 特殊解 $x(t) = 0$ を得る. //

1. (2) **配点3点 一般解2点特殊解1点を正解のみに与える.**

<一>変数分離して, $\frac{dx}{x^2-1} = dt$. これを両辺積分して, $\int \frac{dx}{x^2-1} = \int dt = t + c$ (c は積分定数).

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

を代入して, $\frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = t + c$. これより, $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| = e^{2t+2c}$. ゆえに, $\frac{x-1}{x+1} = \pm e^{2c} e^{2t} = Ce^{2t}$. ここで,

$C = \pm e^{2c}$ である. これを x について解いて,

$$x-1 = Ce^{2t}x + Ce^{2t} \Rightarrow (1-Ce^{2t})x = 1+Ce^{2t} \Rightarrow x = \frac{1+Ce^{2t}}{1-Ce^{2t}}.$$

これより, 一般解は

$$x(t) = \frac{1+Ce^{2t}}{1-Ce^{2t}} \quad (C \neq 0 \text{ は任意定数}).$$

(c は任意ゆえ, $C = \pm e^{2c}$ は0以外の任意の値を取り得るのでこのように書く.)

<特>方程式 $x^2-1=0$ の解 $x = \pm 1$. これより, 特殊解 $x(t) = \pm 1$ を得る. //

1. (3) 配点3点 一般解2点特殊解1点を正解のみに与える.

<一>変数分離して, $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt$. これを両辺積分して, $\sin^{-1}x = t + c$ (c は積分定数). これを x につい

て解いて, 一般解は

$$x = \sin(t + c) \quad (c \text{ は任意定数}).$$

<特>方程式 $\sqrt{1-x^2} = 0$ の解 $x = \pm 1$. これより, 特殊解 $x(t) = \pm 1$ を得る. //

1. (4) 配点3点 一般解2点特殊解1点を正解のみに与える.

<一>変数分離して, $\frac{dx}{(2-x)(3-x)} = dt$. これを両辺積分して, $\log\left|\frac{3-x}{2-x}\right| = t + c$ (c は積分定数). これをよ

り,

$$\left|\frac{3-x}{2-x}\right| = e^{t+c} \therefore \frac{3-x}{2-x} = \pm e^{t+c} = Ce^t \quad (C = \pm e^c \neq 0).$$

これを x について解いて, 一般解は

$$x = \frac{2Ce^t - 3}{Ce^t - 1} \quad (C \neq 0 \text{ は任意定数}).$$

<特>方程式 $(2-x)(3-x) = 0$ の解 $x = 2, 3$. これより, 特殊解 $x(t) = 2, x(t) = 3$ を得る. //

2. (1) 正解のみ2点

ポイント2で $a = 3, g(t) = t$ として,

$$\begin{aligned} x(t) &= Ce^{3t} + e^{3t} \int te^{-3t} dt = Ce^{3t} + e^{3t} \left(-\frac{1}{3}te^{-3t} + \frac{1}{3} \int e^{-3t} dt \right) \\ &= Ce^{3t} + e^{3t} \left(-\frac{1}{3}te^{-3t} - \frac{1}{9}e^{-3t} \right) = Ce^{3t} - \frac{1}{9}(3t+1). // \end{aligned}$$

2. (2) 正解のみ2点

ポイント2で $a = 1, g(t) = \sin t$ として,

$$x(t) = Ce^t + e^t \int e^{-t} \sin t dt.$$

部分積分により,

$$\int e^{-t} \sin t dt = -e^{-t} \sin t + \int e^{-t} \cos t dt = -e^{-t} \sin t + \left(-e^{-t} \cos t - \int e^{-t} \sin t dt \right).$$

これを $\int e^{-t} \sin t dt$ について解いて,

$$\int e^{-t} \sin t dt = -\frac{1}{2}e^{-t} (\sin t + \cos t).$$

これを代入して,

$$x(t) = Ce^t - \frac{1}{2}e^t e^{-t} (\sin t + \cos t) = Ce^t - \frac{1}{2}(\sin t + \cos t). //$$

2. (3) 正解のみ2点

ポイント2で $a = 2, g(t) = e^{-t}$ として,

$$x(t) = Ce^{2t} + e^{2t} \int e^{-t} e^{-2t} dt = Ce^{2t} - \frac{1}{3}e^{2t} e^{-3t} = Ce^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t}. //$$

Q.E.D(Quod Erat Demonstrandum=Which had to be demonstrated): 示されるべき事は以上.

2. (4) 正解のみ2点

ポイント2で $a = -1$, $g(t) = e^{-t}$ として,

$$x(t) = Ce^{-t} + e^{-t} \int e^{-t} e^t dt = Ce^{-t} + te^{-t} = (t+C)e^{-t}. //$$