微積分学II 第4回 積分の計算

1．置換積分

［**定理1**］ $x=g(t)$ のとき，

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt\,. \tag{1}$$

さらに $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$ なら，すなわち $\begin{array}{c|ccc} t & \alpha & \to & \beta \\ \hline x & a & \to & b \end{array}$ なら，

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt\,.\quad // \tag{2}$$

（証明） $F(x)=\int f(x)dx$ と置くと．合成関数の微分則①と $F'(x)=f(x)\cdots$②より，

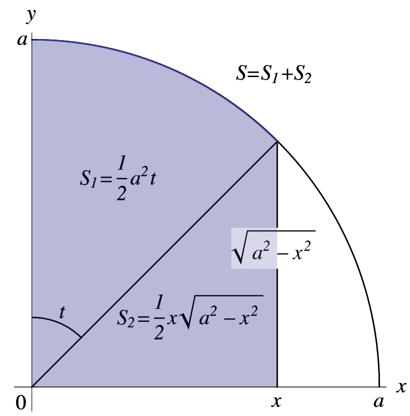
$$\frac{d}{dt}F(g(t))\overset{①}{=}F'(g(t))g'(t)\overset{②}{=}f(g(t))g'(t)\,.$$

両辺を t で積分して， $x=g(t)$ に注意すると，

$$\int f(x)dx=F(x)=F(g(t))=\int f(g(t))g'(t)dt\,.$$

またこの等式より，

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(g(\beta))-F(g(\alpha))=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt\,.\quad //$$



［**例1**］ $F(x)=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\dfrac{1}{2}\left(a^2\sin^{-1}\dfrac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)$.

教科書の記法： $\sin^{-1}x=\arcsin x,\ \cos^{-1}x=\arccos x,\ \tan^{-1}x=\arctan x$.

$x=a\sin t$ $\underbrace{(-\tfrac{\pi}{2}\le t\le\tfrac{\pi}{2})}_{\sin^{-1}\text{の主値}}$ と置くと，

$\begin{array}{c|ccc} t & -\frac{\pi}{2} & \to & \frac{\pi}{2} \\ \hline x & -a & \to & a \end{array}$， $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t,\ \dfrac{dx}{dt}=a\cos t$.

ここは $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ ゆえ， $\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$ に**注意**．ゆえに，

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int(\underbrace{a\cos t}_{\sqrt{a^2-x^2}})(\underbrace{a\cos t}_{\frac{dx}{dt}})dt=a^2\int\cos^2 t\,dt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right).$$

x の関数として書くために， $\sin 2t=2\sin t\cos t$, $\cos t=\dfrac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $\sin t=\dfrac{x}{a}$, $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ を代入して，

$$F(x)=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)=\frac{a^2}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)=\frac{1}{2}\left(a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right).$$

上図の面積 $S=\int_0^x\sqrt{a^2-u^2}\,du=F(x)-F(0)=F(x)$ を考えると， $F(x)$ の成り立ちが分かる．//

［**例2**］ $\begin{cases} G_1(x)=\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{2}\log(x^2+a^2), \\ G_n(x)=\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{-1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}\ (n\ge 2). \end{cases}$ $u=x^2$ と置き置換積分.

２．部分積分

［**定理2**］

(1) 不定積分：$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$,

(2) 定積分　：$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$．//

（証明）積の微分則より，$f'(x)g(x) = \left(f(x)g(x)\right)' - f(x)g'(x)$．両辺を積分して(1)，(2)．//

［**例3**］$\int x^n \log x\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\left((n+1)\log x \;\; -1\right)$．$f(x)=x^n$ ：積分が簡単な方．$g(x)=\log x$．

($n \neq -1$) $\int x^n \cdot \log x\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\cdot \log x - \int \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\dfrac{1}{x}dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\log x - \int\dfrac{x^n}{n+1}dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\log x - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$．

($n=-1$) $\int x^{-1}\cdot\log x\,dx = \log x\cdot\log x - \int \log x\cdot x^{-1}\,dx$ より，$\int x^{-1}\cdot \log x\,dx = \dfrac{1}{2}\log^2 x$．//

［**例4**］$\int \sin^{-1}x\,dx = x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$．$f(x)=1,\ g(x)=\sin^{-1}x$ として，

$$\int 1\cdot\sin^{-1}x\,dx = x\sin^{-1}x - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sin^{-1}x - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

右辺第2項の積分は，$u=1-x^2$ と置いて，$du=-2xdx$ より，

$$\int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int u^{-1/2}\left(-\frac{1}{2}du\right) = -\frac{1}{2}\cdot 2u^{1/2} = -\sqrt{1-x^2}\ .\ //$$

［**例5**］$F_n(x) = \int\dfrac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $(n\geq 1)$ の漸化式：$\begin{cases} F_1(x) = \int\dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right), \\ F_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2na^2}\left(\dfrac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)F_n(x)\right) \ (n\geq 1). \end{cases}$

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int 1\cdot\frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = x\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^n} - \int x\cdot\frac{2x(-n)}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = x\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n} - \frac{a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\right)dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nF_n(x) - 2na^2F_{n+1}(x). \end{aligned}$$

これを $F_{n+1}(x)$ について解いて漸化式を得る．//

第4回練習問題

次の積分を求めよ．

(1) $\int x\sin(x^2-1)dx$　(2) $\int 6x^2\tan^{-1}x\,dx$　(3) $\int_0^1\sqrt{2-x^2}dx$　(4) $\int\dfrac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$　(5) $\int\dfrac{dx}{(x^2+1)^2}$

(1)は置換積分，(2)は部分積分，(3)，(4)，(5)は例1，2，5の公式を使え．

第4回練習問題

次の積分を求めよ．（各2点，計10点）

(1) $\int x\sin(x^2-1)dx$ (2) $\int 6x^2\tan^{-1}x\,dx$ (3) $\int_0^1\sqrt{2-x^2}dx$ (4) $\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$ (5) $\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$

(1)は置換積分，(2)は部分積分，(3)，(4)，(5)は公式を使え．

解答 sudden death! 正解に2点．部分点無し．

(1) $u=x^2$ と置くと， $du=2x\,dx$ ゆえ，

$$\int x\sin(x^2-1)dx=\int\sin(\underbrace{u}_{x^2}-1)\underbrace{\frac{du}{2}}_{dx}=-\frac{1}{2}\cos(u-1)=-\frac{1}{2}\cos(x^2-1).$$

(2) $F(x)=\int 6x^2\cdot\tan^{-1}x\,dx=2x^3\cdot\tan^{-1}x-\int 2x^3\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$． 右辺第2項の積分をもとめる．

$u=x^2$ と置くと， $du=2x\,dx$ ゆえ，

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}2x\,dx=\int\frac{u}{1+u}du=\int\left(1-\frac{1}{1+u}\right)du=u-\log(1+u)=x^2-\log(1+x^2).$$

よって， $F(x)=2x^3\cdot\tan^{-1}x-x^2+\log(1+x^2)$．

(3) 例1の公式で， $a=\sqrt{2}$ とすると，

$$\int_0^1\sqrt{2-x^2}dx=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(2\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}+1\sqrt{2-1^2}\right)-\frac{1}{2}\left(2\sin^{-1}\frac{0}{\sqrt{2}}+1\sqrt{2-0^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(2\frac{\pi}{4}+1\right)=\frac{\pi+2}{4}.$$

(4) 例2の公式で， $a=1$, $n=2$ とすると， $\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}=\frac{-1}{2(x^2+1)}$．

(5) 例5の漸化式で， $a=1$, $n=1$ とすると， $F_1(x)=\tan^{-1}x$ ゆえ，

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=F_2(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+F_1(x)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\tan^{-1}x\right).$$