# 微積分学II 第3回 積分の基礎

## 1．区分求積法

**☆1 区分求積法の公式**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x\ .$$

$$\text{ここで,}\quad \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x\ .$$

**☆2 区分求積法の公式** ( $a=0, b=1, \Delta x = 1/n$ のとき)

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

左辺右辺を逆にみると，総和の極限が定積分で計算できることになる．

［例1］☆2により $Q = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$ を求めよ．

$$Q = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i} \overset{①}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}} \overset{②}{=} \int_0^1\frac{1}{1+x}dx = \left[\log(1+x)\right]_0^1 = \log 2 - \log 1 = \log 2.$$

この様に考えた：① ☆2の形にするため，$\frac{1}{n}$ を $\sum$ の外に無理矢理くくり出す．② ☆2を使う．

総和の項 $\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$ の，$\frac{i}{n}$ を $x$ で置き換えた $\frac{1}{1+x}$ が被積分関数．である．

## 2．微積分学の基本定理．不定積分の微分

**☆3 積分の中間値の定理**：区間 $[a,b]$ で $f(x)$ が連続なら，$a,b$ の内分点 $c$ が存在して，

$$Q = \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)\ . \tag{1}$$

（証明）$[a,b]$ における $f(x)$ の最大値を $M$，最小値を $m$ とすると，$[a,b]$ で $m \le f(x) \le M$ ゆえ

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M\,dx = M(b-a).$$
$$\therefore m \le \frac{Q}{b-a} \le M.$$

よって，中間値の定理により，$a,b$ の内分点 $c$ が存在して，$f(c) = \frac{Q}{b-a}$．この $c$ について(1)が成立する．

**☆4 微積分学の基本定理**：$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ とすると，$F'(x) = f(x)$．すなわち $\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)}$．

（証明）積分の中間値の定理より，任意の $y$ について，$x,y$ の内分点 $z$ が存在して，

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)dt = f(z)(y-x)$$

となる．$y\to x$ で $z\to x$ ゆえ，$F'(x) = \lim_{y\to x}\frac{F(y)-F(x)}{y-x} = \lim_{y\to x}\frac{f(z)(y-x)}{y-x} = \lim_{y\to x} f(z) = f(x)$．

［例題2］次の関数の導関数を求めよ．　(1) $f(x)=\int_0^x (x-t)\cos t\,dt$　　(2) $f(x)=\int_0^{2x}\sin^2 t\,dt$ .

(1) $f'(x)=\left(x\cdot\underline{\int_0^x \cos t\,dt}-\int_0^x t\cos t\,dt\right)'=\left(1\cdot\underline{\int_0^x \cos t\,dt}+x\cdot\underline{\cos x}\right)-x\cos x=\int_0^x \cos t\,dt=\sin x$ .

(2) $G(x)=\int_0^x \sin^2 t\,dt$ とおくと，　$f(x)=G(2x), G'(x)=\sin^2 x$．よって，　$f'(x)=G'(2x)\cdot(2x)'=2\sin^2 2x$ .

例題2と同様にして，いくつかの公式が導ける．

☆5 $\boxed{\dfrac{d}{dx}\int_x^a f(t)dt=-f(x)}$ .

（証明）$\dfrac{d}{dx}\int_x^a f(t)dt=-\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt\overset{☆4}{=}-f(x)$ .

☆6 $\boxed{\dfrac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt=f(g(x))g'(x)}$ .

（証明）$\dfrac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt=\dfrac{d}{dx}F(g(x))=F'(g(x))g'(x)\overset{☆4}{=}f(g(x))g'(x)$ .

☆7 $\boxed{\dfrac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt=f(g(x))g'(x)-f(h(x))h'(x)}$ .

（証明）$\dfrac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt=\dfrac{d}{dx}\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt-\int_a^{h(x)} f(t)dt\right)\overset{☆4,6}{=}f(g(x))g'(x)-f(h(x))h'(x)$ .

## 第3回練習問題

1．次の極限値を求めよ．

(1) $L=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\dfrac{2i}{n^2+i^2}$　　(2) $L=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+k)}}$

2．次の関数の導関数を求めよ．

(1) $f(x)=\int_0^x \dfrac{1}{1+t^2}dt$　　(2) $f(x)=\int_x^{x+\pi/2}\sin t\,dt$

# 第3回練習問題

1．次の極限値を求めよ．（各3点）

(1) $L=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{2i}{n^2+i^2}$　　(2) $L=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}$

2．次の関数の導関数を求めよ．（各2点）

(1) $f(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt$　　(2) $f(x)=\int_x^{x+\pi/2}\sin t\,dt$

＜解答＞

1(1)（3点）

強引に $\frac{1}{n}$ をくくり出し， $L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{2in}{n^2+i^2}$．（部分点1点）

形を整え，☆2より $L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{2\left(\frac{i}{n}\right)}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx$．（部分点1点）

よって， $L=\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx=\left[\log(1+x^2)\right]_0^1=\log 2$．（部分点1点）

1(2)（3点）

強引に $\frac{1}{n}$ をくくり出し， $L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n(n+k)}}$．（部分点1点）

形を整え，☆2より $L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+k/n}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx$．（部分点1点）

よって， $L=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx=\left[2(1+x)^{1/2}\right]_0^1=2(\sqrt{2}-1)$．（部分点1点）

2(1)（正解のみ2点）

微積分学の基本定理より， $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$（被積分関数）である．

2(2)（正解のみ2点）

☆7より， $f'(x)=(x+\pi/2)'\cdot\sin(x+\pi/2)-(x)'\cdot\sin x=\sin(x+\pi/2)-\sin x$．

（おまけ） $f'(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$．（この変形は面白いけど省略してもよい）