微積分学II 第2回 テイラー展開

1．テイラー展開

△ $f(x)$ は $x=a$ で C^k 級 (k 回**連続微分可能**) ⇔ $x=a$ で $f^{(i)}(x)$ $(0\le i\le k)$ が存在して連続．//

初等関数 $f(x)$ の多くは，$x=a$ で C^∞ 級（何回でも微分できる）なら，

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=\underbrace{f(a)}_{k=0}+\underbrace{f'(a)(x-a)}_{k=1}+\underbrace{\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}_{k=2}+\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\cdots$$

のように，収束する無限級数に展開できる．これを a を中心とする $f(x)$ の**テイラー展開**という．特に，

$a=0$ とした，$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ を**マクローリン展開**という．//

△ n **次テイラー多項式**（テイラー展開の部分級数）：中心を $a=0$ としたとき，

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=\underbrace{f(a)}_{k=0}+\underbrace{f'(a)(x-a)}_{k=1}+\underbrace{\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}_{k=2}+\cdots+\underbrace{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{k=n}\cong f(x)\text{．}\quad\cdots①$$

テイラー多項式は，$x=a$ の周りで $f(x)$ を近似するのによく用いられる．

2．テイラー多項式と剰余(誤差)

［**定理1**］**(テイラーの定理)** $f(x)$ は a を含む開区間 I で $n-1$ 回連続微分可能であり，n 回微分可能とする．このとき，任意の $x\in I$ に対し，a,x の内分点 c が存在して次式が成り立つ．（証明は教科書p.41)

$$f(x)=p_{n-1}(x)+R_n(x),\ R_n(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n\text{．}\ //$$

右辺第2項の $R_n(x)$ を**剰余**と呼ぶ．

$p_{n-1}(x)$ は $f(x)$ の近似多項式($n-1$ 次近似)．$f(x)-p_{n-1}(x)=R_n(x)$ ゆえ，剰余 $R_n(x)$ は $p_{n-1}(x)$ の誤差．

［**例1**］0次近似：$f(x)=\underbrace{f(a)}_{p_0(x)}+\underbrace{f'(c)(x-a)}_{R_1(x)}$　（c は a と x の内分点)

1次近似：$f(x)=\underbrace{f(a)+f'(a)(x-a)}_{p_1(x)}+\underbrace{\frac{f''(c)}{2}(x-a)^2}_{R_2(x)}$　（c は a と x の内分点）

2次近似：$f(x)=\underbrace{f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2}_{p_2(x)}+\underbrace{\frac{f^{(3)}(c)}{6}(x-a)^3}_{R_3(x)}$（$c$ は a と x の内分点）…②

［**例2**］$f(x)=e^{-x}$ とする．

(1) $a=0$ の場合，$p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ を具体的に書け．

(2) $a=0$ の場合の公式②を具体的に書け．

(3) (2)を用いて，$x>0$ のとき不等式 $p_3(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}<e^{-x}<1-x+\frac{x^2}{2}=p_2(x)$ が成り立つことを示せ．

解答(1) 導関数を計算して，$f^{(0)}(x)=f(x)=e^{-x}$, $f^{(1)}(x)=-e^{-x}$, $f^{(2)}(x)=e^{-x}$, $f^{(3)}(x)=-e^{-x}$．$x=a=0$ における微係数は $f^{(0)}(0)=1$, $f^{(1)}(0)=-1$, $f^{(2)}(0)=1$, $f^{(3)}(0)=-1$．ゆえに，

$$p_3(x)=\frac{f(0)}{0!}+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3.$$

同じく， $p_1(x)=1-x,\ p_2(x)=1-x+\frac{1}{2}x^2$． $p_3(x)=\overbrace{\underbrace{1-x}_{p_1(x)}+\frac{1}{2}x^2}^{p_2(x)}-\frac{1}{6}x^3$ ゆえ， $p_3(x)$ を切り縮めてもよい.

解答(2) $f^{(3)}(c)=-e^{-c}$ と公式②より， $e^{-x}=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{e^{-c}}{6}x^3\ \ (a=0<c<x)\cdots$③

c は $a=0$ と x の内分点なので $0<c<x$ である.

解答(3)　$0<c<x$ のとき， $0<\frac{e^{-c}}{6}x^3<\frac{1}{6}x^3$． よって， $1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3<1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{e^{-c}}{6}x^3<1-x+\frac{1}{2}x^2$． これと，③より $1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}<e^{-x}<1-x+\frac{x^2}{2}$．

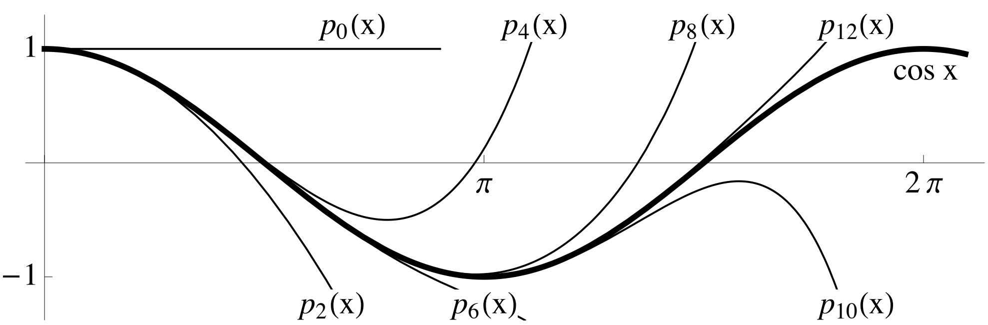
3．代表的な初等関数のマクローリン展開

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \qquad (|x|<\infty) \tag{1}$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots \qquad (|x|<\infty) \tag{2}$$

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots \qquad (|x|<\infty) \tag{3}$$

［**例3**］ $f(x)=\cos x$ とテイラー多項式 $p_0(x)=p_1(x)=1,\ p_2(x)=p_3(x)=1-\frac{x^2}{2},\ p_4(x)=p_5(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!},\ \cdots$.



n が大きくなるにつれ， $y=p_{2n}(x)$ が $y=\cos x$ のグラフに絡みつくように接近する様子が見える.

第2回練習問題

$f(x)=\sin x$ とする.

(1) $a=0$ の場合， $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ を具体的に書け.

(2) $a=0$ の場合の公式②を具体的に書け.

(3) (2)を用いて， $0<x<\frac{\pi}{3}$ のとき不等式 $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x-\frac{x^3}{12}$ が成り立つことを示せ.

第2回練習問題

$f(x)=\sin x$ とする．テイラー展開の中心を $a=0$ とする．

(1) $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ を具体的に書け．（4点）

(2) $x>0$ の場合の公式②を具体的に書け．（4点）

(3) (2)を用いて，$0<x<\dfrac{\pi}{3}$ のとき不等式 $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x-\dfrac{x^3}{12}$ が成り立つことを示せ．（2点）

解答

解答(1)（4点）

導関数を計算して，$f^{(0)}(x)=f(x)=\sin x$，$f^{(1)}(x)=\cos x$，$f^{(2)}(x)=-\sin x$，$f^{(3)}(x)=-\cos x$．（部分点1点）

$x=a=0$ における微係数は $f^{(0)}(0)=0$，$f^{(1)}(0)=1$，$f^{(2)}(0)=0$，$f^{(3)}(0)=-1$．（部分点1点）

ゆえに，

$$p_3(x)=\frac{f(0)}{0!}+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3=x-\frac{1}{6}x^3.$$（部分点1点）

同じく，$p_1(x)=x$，$p_2(x)=x$．（部分点1点）

$p_3(x)=\overbrace{\underbrace{x}_{p_1(x)}}^{p_2(x)}+\dfrac{1}{6}x^3$ ゆえ，$p_3(x)$ を1次式，2次式に切り縮めてもよい．

解答(2)（4点）

$f^{(3)}(c)=-\cos c$ と公式②より，$f(x)=x+\dfrac{f^{(3)}(c)}{6}x^3=x-\dfrac{1}{6}x^3\cos c$ …③ （部分点3点）

c は $a=0$ と x の内分点なので $0<c<x$ である．（範囲 $0<c<x$ に部分点1点，内分関係のみでもよい）

解答(3)（2点）

$0<x<\dfrac{\pi}{3}$ なら $0<c<\dfrac{\pi}{3}$ ゆえ，$\dfrac{1}{12}x^3=\dfrac{1}{6}x^3\cos\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{1}{6}x^3\cos c<\dfrac{1}{6}x^3\cos 0=\dfrac{1}{6}x^3$．（部分点1点）

よって，$x-\dfrac{1}{6}x^3<x-\dfrac{1}{6}x^3\cos c<x-\dfrac{1}{12}x^2$．これと，③より $x-\dfrac{x^3}{6}<e^{-x}<x-\dfrac{x^2}{12}$．（部分点1点）

全体として明解な証明なら2点満点．

（初等関数のマクローリン展開追加）

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=1+x+x^2+\cdots \quad (|x|<1) \tag{4}$$

$$\log(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}=1-x+\frac{x^2}{2}-\cdots \quad (|x|<1) \tag{5}$$

（(1)の導出） $f(x)=e^x$，$f^{(k)}(x)=e^x$ より， $f^{(k)}(0)=e^0=1$ $(k\geq 0)$．よって，

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k\ .$$

（(3)の導出） $f(x)=\sin x$， $f^{(l)}(x)=(\sin x)^{(l)}=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$ より， $f^{(2k)}(0)=\sin(k\pi)=0\ \cdots$①，

$f^{(2k+1)}(0)=\sin((k+1/2)\pi)=(-1)^k\ \cdots$②．ゆえに，

$$p_{2n}(x)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{f^{(l)}(0)}{l!}x^l=\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}}_{l=2k}+\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}}_{l=2k+1}\overset{①}{=}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\overset{②}{=}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\ .$$

（(4)の導出） $f(x)=\frac{1}{1-x}$，$f^{(k)}(x)=\frac{k!}{(1-x)^k}$ より， $f^{(k)}(0)=\frac{k!}{(1-0)^n}=k!$ $(k\geq 0)$．よって，

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}x^k\ .$$

（(5)の導出） $f(x)=\log(1+x)$，$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ $(k\geq 1)$ より， $f(0)=0$，$f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$ $(k\geq 1)$．

よって，

$$\log(1+x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\ .$$