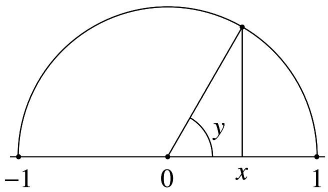
微積分学II 第1回 逆三角関数

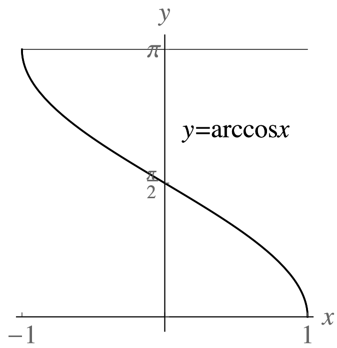
1．逆三角関数

この授業の資料では，△は定義，☆は定理を意味する．

△ **アークコサイン** $y=\arccos x$ ： cos が x になる弧度(アーク) $y\in[0,\pi]$． y の範囲 $[0,\pi]$ を**主値**という．

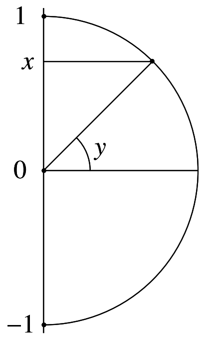
$y=\arccos x$ の**かまぼこ図→**

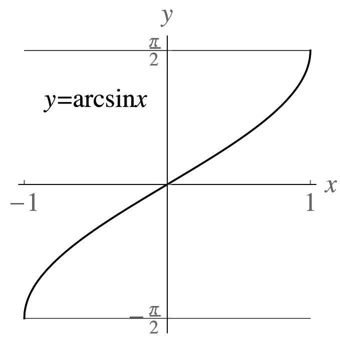




△ **アークサイン** $y=\arcsin x$ ： sin が x になる弧度 $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$． y の範囲 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ を**主値**という．

$y=\arcsin x$ の**かまぼこ図→**

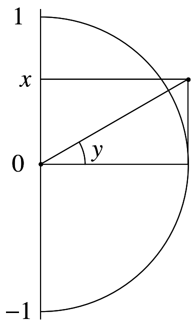


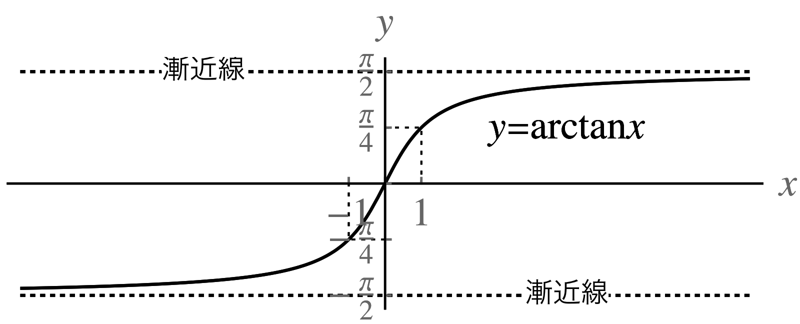


△ **アークタンジェント** $y=\arctan x$ ： tan が x になる弧度 $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$． y の範囲 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ を**主値**という．

$y=\arctan x$ の

かまぼこ図→





［例1］ $\arccos\dfrac{1}{2}=\square$, $\arccos(-1)=\square$, $\arcsin\dfrac{1}{2}=\square$, $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\square$, $\arctan 1=\square$, $\arctan\sqrt{3}=\square$

☆ $\cos(\arccos x)=x$ である．また， $y\in[0,\pi]$ なら $\arccos(\cos y)=y$ である．

☆ $\sin(\arcsin x)=x$ である．また， $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ なら $\arcsin(\sin y)=y$ である．

☆ $\tan(\arctan x)=x$ である．また， $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ なら $\arctan(\tan y)=y$ である．

［例2］ $\cos\left(\arccos\dfrac{2}{3}+\arcsin\dfrac{1}{2}\right)$ の計算． $\alpha=\arccos\dfrac{2}{3}$, $\beta=\arcsin\dfrac{1}{2}$ と置く．かまぼこ図より $\alpha,\beta\in(0,\pi/2)$．

ゆえに， $\cos\alpha=2/3$ より $\sin\alpha=\sqrt{1-(2/3)^2}=\sqrt{5}/3$． $\sin\beta=1/2$ より $\cos\beta=\sqrt{3}/2$．以上より，

$$\cos\left(\arccos\frac{2}{3}+\arcsin\frac{1}{2}\right)=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{3}\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{6}.$$

［例3］方程式 $\arctan x = \arccos\dfrac{1}{2x}$ を解け．$\theta = \arctan x = \arccos\dfrac{1}{2x}$ とおくと，$x = \tan\theta,\ \dfrac{1}{2x} = \cos\theta$．

ゆえに，$1 + x^2 = 1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta} = 4x^2$．この方程式を解いて，$\therefore x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$．

θ は arctan と arccos の主値の範囲ゆえ，$0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2}$．よって，$x = \tan\theta \ge 0$．以上より解は $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$．

2．逆三角関数の導関数

［定理］(逆三角関数の微分公式)

① $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，　② $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$，　③ $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}x = \dfrac{1}{1+x^2}$． //

（証明）① $y = \sin^{-1}x$ と置くと，$\sin y = x$．また，y は主値の範囲 $-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$ にあるので,

$\cos y = +\sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$．　$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$．

② $y = \cos^{-1}x$ と置くと，$\cos y = x$．また，y は主値の範囲 $0 \le y \le \pi$ にあるので,

$\sin y = +\sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}$．　$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)} = \dfrac{1}{-\sin y} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$．

③ $y = \tan^{-1}x$ と置くと，$\tan y = x,\ \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$．　$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)} = \dfrac{1}{1+x^2}$． //

3．Machin(マチン)の公式（1706年）

☆ **マチンの公式：** $\dfrac{\pi}{4} = 4\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan\dfrac{1}{239}$　　$\pi = 3.1415\cdots$ の計算に用いられている．

（証明）$\alpha = \arctan\dfrac{1}{5}$ と置くと $\tan\alpha = \dfrac{1}{5}$ ゆえ，加法定理より

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2/5}{1-1/25} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12},\quad \tan 4\alpha = \frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} = \frac{2\cdot 5/12}{1-25/144} = \frac{120}{119}.$$

$$\therefore \tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\alpha - \tan(\pi/4)}{1+\tan 4\alpha\tan(\pi/4)} = \frac{120/119-1}{1+120/119} = \frac{1}{239}.$$

これより，$4\alpha - \dfrac{\pi}{4} = \arctan\dfrac{1}{239}$．　$\alpha = \arctan\dfrac{1}{5}$ を代入して，求める公式を得る．//

練習問題第1回

(1) $\alpha = \arccos\dfrac{-1}{2},\ \beta = \arcsin\dfrac{-\sqrt{2}}{2},\ \gamma = \arctan(-1)$ を求めよ．

(2) $a = \sin\left(2\arcsin\dfrac{1}{3}\right)$ を計算せよ．$\theta = \arcsin\dfrac{1}{3}$ と置く．

(3) $f(x) = \arccos x,\ g(x) = \arcsin x,\ h(x) = \arctan x$ の2階導関数を求めよ．

練習問題第1回解答

(1) $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\arccos\dfrac{-1}{2}$, $\arcsin 1$, $\arcsin\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$, $\arctan\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\arctan(-1)$ を求めよ．（かまぼこ図を描く．）

(2) $a=\sin\left(2\arcsin\dfrac{1}{3}\right)$ を計算せよ．（$\theta=\arcsin\dfrac{1}{3}$ と置く．）

(3) $f(x)=\arccos x$, $g(x)=\arcsin x$, $h(x)=\arctan x$ の2階導関数を求めよ．

解答

(1) 授業では6題中３題出題（配点各2点）正解のみ.

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6},\qquad \arccos\frac{-1}{2}=\frac{2\pi}{3},$$
$$\arcsin 1=\frac{\pi}{2},\qquad \arcsin\frac{-\sqrt{2}}{2}=-\frac{\pi}{4},$$
$$\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6},\qquad \arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}.$$

(2) （配点1点）正解のみ

$\theta=\arcsin\dfrac{1}{3}$ とすると， $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$．かまぼこ図より， $0<\theta<\pi/2$ ゆえ，

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{8}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$
$$\therefore a=\sin\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\frac{1}{3}\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

(3) （配点各1点）正解のみ．二重下線も一重下線も正解.

$f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=-(1-x^2)^{-1/2}$ より， $f''(x)=(-1)\left(-\dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}\right)\cdot(-2x)=\underline{\underline{-x(1-x^2)^{-3/2}}}=\underline{\dfrac{-x}{(1-x^2)^{3/2}}}$.

$g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-f'(x)$ より， $g''(x)=-f''(x)=\underline{\underline{x(1-x^2)^{-3/2}}}=\underline{\dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}}}$.

$h'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=(1+x^2)^{-1}$ より， $h''(x)=-(1+x^2)^{-2}\cdot 2x=\underline{\underline{-2x(1+x^2)^{-2}}}=\underline{\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}}$.