部分分数分解

1．概要

有理式は，次の例のように多項式と分母の因子の負巾項の和に分解される．

［例1］

(1) $\dfrac{2x^4}{x^2-1}=\dfrac{2x^4}{(x-1)(x+1)}=(2x^2+2)+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{-1}{x+1}$.

分母の因子 $x-1, x+1$．

(2) $\dfrac{4x^4}{x^3-x^2-x+1}=\dfrac{4x^4}{(x-1)^2(x+1)}=(4x+4)+\dfrac{7}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x+1}$.

分母の因子 $x-1, x^2+1$．

(3) $\dfrac{x^2-2x-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{-1}{(x-1)^2}+\dfrac{-x+1}{x^2+1}$.

分母の因子 $x-1, x^2+1$．

(4) $\dfrac{2x^3+8}{x^4+4}=\dfrac{2x^3+8}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)}=\dfrac{1}{x^2-2x+2}+\dfrac{2x+3}{x^2+2x+2}$.

分母の因子 x^2-2x+2, x^2+2x+2．

1次因子の負巾項の分子は例(3)の最右辺第1,2項の様に定数であるが，2次因子の負巾項の分子は例(4)の最右辺第1,2項の様に一般には１次式である．このような分解を部分分数分解と呼ぶ．

2．部分分数分解の技法

実係数の有理式 $f(x)/g(x)$ を考える． $f(x), g(x)$ は実係数多項式である．これから，多項式 f の次数を $\deg f$ と書くことにする．

部分分数分解は，3つの技法により項を分離し，問題を次々とより簡単な有理式の分解に帰着させることで達成される．以下，それぞれの技法について述べる．

2-1. 多項式の分離（技法1）

$\deg f \ge \deg g$ のときに1度だけ用いる技法.

＜技法１＞

(i) 分子 $f(x)$ を分母 $g(x)$ で割って商 $q(x)$ と余り $r(x)$ を求める．すなわち，

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \deg r < \deg g .$$

(ii) これにより，

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} .$$

これにより， $f(x)/g(x)$ $(\deg f \ge \deg g)$ の部分分数分解は，有理式 $r(x)/g(x)$ $(\deg r < \deg g)$ の部分分数分解に帰着される.

以後，対象とする有理式 $f(x)/g(x)$ では $\deg f < \deg g$ とする.

2-2. 1次因子の負巾項の分離（技法2）

分母 $g(x)$ が実根 α を持つときに用いる技法．実根 α の重複度を ρ としよう.

＜技法２＞

(i) $g(x)$ を因数分解して，

$$g(x) = (x-\alpha)^{\rho} h(x).$$

(ii) $(x-\alpha)^{-\rho}$ の項を次の様に分離.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-\alpha)^{\rho} h(x)} = \frac{f(\alpha)}{(x-\alpha)^{\rho} h(\alpha)} + \frac{f_1(x)}{(x-\alpha)^{\rho-1} h(x)}, \tag{2.1}$$

右辺第2項は，式(2.1)に $(x-\alpha)^{\rho-1} h(x)$ を掛けて整理し，

$$f_1(x)=\frac{f(x)-\dfrac{f(\alpha)}{h(\alpha)}h(x)}{x-\alpha} \tag{2.2}$$

で確定する．これは実は多項式である．なぜなら，この分子はを代入すると

$$f(\alpha)-\left(\frac{f(\alpha)}{h(\alpha)}\right)h(\alpha)=0$$

となるので，で割り切れるからである．また，その次数は

$$\deg f_1=\deg(f-\left(\frac{f(\alpha)}{h(\alpha)}\right)h)-1\le\max\{\deg f,\deg g-\rho\}-1<\deg g-1$$

である．

分母$g(x)$が実根を持つとき，技法2により問題はより低い次数の有理式

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\frac{f_1(x)}{(x-\alpha)^{\rho-1}h(x)},\deg g_1=\deg g-1,\deg f_1<\deg g_1$$

の部分分数分解に帰着される．

2-3. 2次因子の負巾項の分離（技法3）

分母$g(x)$が共役複素根を持つときに用いる技法．共役複素根の重複度をσとしよう．

$\alpha,\bar{\alpha}$を根とする実係数2次式を

$$x^2+\beta x+\gamma=(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})=x^2-2\,\mathrm{Re}\{\alpha\}x+|\alpha|^2$$

とする．

＜技法3＞

(i) $g(x)$を因数分解して，

$$g(x)=(x^2+\beta x+\gamma)^{\sigma}h(x).$$

(ii) $(x^2+\beta x+\gamma)^{-\sigma}$の項を次の様に分離．

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)^{\sigma}h(x)}=\frac{bx+c}{(x^2+\beta x+\gamma)^{\sigma}}+\frac{f_1(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)^{\sigma-1}h(x)}, \tag{2.3}$$

$$\delta=\frac{f(\alpha)}{h(\alpha)},b=\frac{\mathrm{Im}\{\delta\}}{\mathrm{Im}\{\alpha\}},c=\mathrm{Re}\{\delta\}-b\,\mathrm{Re}\{\alpha\}, \tag{2.4}$$

右辺第2項は，式(2.3)の両辺に$(x^2+\beta x+\gamma)^{\sigma-1}h(x)$を掛けて整理した

$$f_1(x)=\frac{f(x)-(bx+c)h(x)}{x^2+\beta x+\gamma}. \tag{2.5}$$

で確定する．これが実は多項式であることを示す．式(2.4)は等式

$$\delta=\frac{f(\alpha)}{h(\alpha)}=b\alpha+c.$$

が成立するように，実数b,cを定めた．ゆえに，式(2.5)の分子は，$x=\alpha$を代入すると

$$f(\alpha)-(b\alpha+c)h(\alpha)=f(\alpha)-\left(\frac{f(\alpha)}{h(\alpha)}\right)h(\alpha)=0$$

となるので，$x-\alpha$で割り切れる．また，これは実係数多項式なので

$$f(\bar{\alpha})-(b\bar{\alpha}+c)h(\bar{\alpha})=\overline{f(\alpha)-(b\alpha+c)h(\alpha)}=0.$$

ゆえに，$x-\bar{\alpha}$でも割り切れる．すなわち，式(2.5)の分子は分母$x^2+\beta x+\gamma=(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$で割り切れる．

　最後に，$f_1(x)$の次数は

$$\deg f_1=\deg(f-(bx+c)h)-2\le\max\{\deg f,\deg g-2\sigma+1\}-2<\deg g-2$$

である．

　分母$g(x)$が共役複素根を持つときも，技法3により問題はより低い次数の有理式

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\frac{f_1(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)^{\sigma-1}h(x)},\deg g_1=\deg g-2,\ \deg f_1<\deg g_1$$

の部分分数分解に帰着される．

［注］技法2で分離項をとすると，その分子は因子の零点上で，

が成立するように決められている．技法3でも分離項$(bx+c)/(x^2+\beta x+\gamma)^\sigma$の分子は，因子$x^2+\beta x+\gamma$の相異なる2つの零点$\alpha,\bar{\alpha}$上で，

$$\frac{f(x)}{h(x)}=bx+c$$

が成立するように決められている．技法2,3は共通の原理から構成されている．

３．計算例

例1の部分分数分解を行う．

(1) $\dfrac{2x^4}{x^2-1}=\dfrac{2x^4}{(x-1)(x+1)}=(2x^2+2)+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{-1}{x+1}$　を導く．

技法１により，分子を分母で割った商と余りを求めて多項式を分離すると，

$$\frac{2x^4}{x^2-1}=\frac{(2x^2+2)(x^2-1)+2}{x^2-1}=(2x^2+2)+\frac{2}{x^2-1}=(2x^2+2)+\frac{2}{(x-1)(x+1)}.$$

技法2により，最右辺第2項$\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$を分解する．式(2.1)で$f(x)=2,h(x)=x+1$として，

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{f(x)}{(x-1)h(x)}=\frac{f(1)}{(x-1)h(1)}+\frac{f_1(x)}{x+1}=\frac{1}{x-1}+\frac{f_1(x)}{x+1}.$$

これより，

$$\frac{f_1(x)}{x+1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{x-1}=\frac{2-x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{-x+1}{(x-1)(x+1)}=-\frac{1}{x+1}.$$

$$\therefore\ \frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}.$$

以上より，

$$\frac{2x^4}{x^2-1}=(2x^2+2)+\frac{1}{x-1}+\frac{-1}{x+1}.$$

(2) $\dfrac{4x^4}{x^3-x^2-x+1}=\dfrac{4x^4}{(x-1)^2(x+1)}=(4x+4)+\dfrac{7}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x+1}$　を導く．

技法１により，分子を分母で割った商と余りを求めて多項式を分離すると，

$$\frac{4x^4}{x^3-x^2-x+1}=\frac{(4x^2+4)(x^3-x^2-x+1)+8x^2-4}{x^3-x^2-x+1}$$
$$=(4x^2+4)+\frac{8x^2-4}{x^3-x^2-x+1}=(4x^2+4)+\frac{8x^2-4}{(x-1)^2(x+1)}.$$

技法2により，最右辺第2項を分解する．式(2.1)で$f(x)=8x^2-4,h(x)=x+1$として，

$$\frac{8x^2-4}{x^3-x^2-x+1}=\frac{f(x)}{(x-1)^2h(x)}=\frac{f(1)}{(x-1)^2h(1)}+\frac{f_1(x)}{(x-1)h(x)}=\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{8x+6}{(x-1)(x+1)}.$$

技法2により，最右辺第2項の分解を進める． $f(x)=8x+6, h(x)=x+1$ として，

$$\frac{8x+6}{(x-1)(x+1)}=\frac{f(x)}{(x-1)h(x)}=\frac{f(1)}{(x-1)h(1)}+\frac{f_1(x)}{h(x)}=\frac{7}{x-1}+\frac{1}{x+1}.$$

以上より，

$$\frac{4x^4}{x^3-x^2-x+1}=(4x+4)+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{7}{x-1}+\frac{1}{x+1}.$$

(3) $\dfrac{x^2-2x-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{-1}{(x-1)^2}+\dfrac{-x+1}{x^2+1}$ を導く．

分子の次数が分母の次数より小さいので，技法 1 を用いる必要はない．ふつう，1次因子の処理を優先した方が計算が簡単になる．

技法2により因子の処理をおこなう．式(2.1)で $f(x)=x^2-2x-1, h(x)=x^2+1$ として，

$$\frac{x^2-2x-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}=\frac{f(x)}{(x-1)^2h(x)}=\frac{f(1)}{(x-1)^2h(1)}+\frac{f_1(x)}{(x-1)h(x)}=\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{2x}{(x-1)(x^2+1)}.$$

技法2により，最右辺第2項 $\dfrac{2x}{(x-1)(x^2+1)}$ を分解する．式(2.1)で $f(x)=2x, h(x)=x^2+1$ として，

$$\frac{2x}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{f(x)}{(x-1)h(x)}=\frac{f(1)}{(x-1)h(1)}+\frac{f_1(x)}{h(x)}=\frac{1}{x-1}+\frac{-x+1}{x^2+1}.$$

以上より，

$$\frac{x^2-2x-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}=\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{-x+1}{x^2+1}.$$

(4) $\dfrac{2x^3+8}{x^4+4}=\dfrac{2x^3+8}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)}=\dfrac{1}{x^2-2x+2}+\dfrac{2x+3}{x^2+2x+2}$ を導く．

ここでは，2次因子を処理せざるを得ない．

技法3で因子 x^2-2x+2 の処理を行う．式(2.3)で $f(x)=2x^3+8, h(x)=x^2+2x+2$ として，

$$\frac{2x^3+8}{x^4+4} = \frac{f(x)}{(x^2-2x+2)h(x)} = \frac{bx+c}{x^2-2x+2} + \frac{f_1(x)}{x^2+2x+2}.$$

両辺に x^2-2x+2 を掛けて，

$$\frac{f(x)}{h(x)} = bx+c+\frac{(x^2-2x+2)f_1(x)}{x^2+2x+2}.$$

両辺に x^2-2x+2 の根 $\alpha = 1+i$ を代入して，

$$\frac{f(\alpha)}{h(\alpha)} = b\alpha + c = b(1+i)+c = b+c+ib,$$

$$\frac{f(\alpha)}{h(\alpha)} = \frac{2(1+i)^3+8}{(1+i)^2+2(1+i)+2} = \frac{4+4i}{4+4i} = 1$$

より， $b+c+ib=1$．両辺の実部，虚部を比較して， $b=0, c=1$．これで分離する項

$$\frac{bx+c}{x^2-2x+2} = \frac{1}{x^2-2x+2}$$

が確定した．これを，元の有理式から差し引くと

$$\frac{2x^3+8}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)} - \frac{1}{x^2-2x+2} = \frac{2x^3+8-(x^2+2x+2)}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)} = \frac{2x^3-x^2-2x+6}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)}.$$

分子は因子 x^2-2x+2 をもつはずである．実際，

$$\frac{2x^3-x^2-2x+6}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)} = \frac{(x^2-2x+2)(2x+3)}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)} = \frac{2x+3}{x^2+2x+2}.$$

ゆえに，

$$\frac{2x^3+8}{x^4+4} = \frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{2x+3}{x^2+2x+2}.$$

４．定理

代数学の基本定理より，実係数の n 次式 $(n \ge 1)$

$$g(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \ , b_i \in \mathbb{R}\ (0 \le i \le n)$$

は実係数1次因子 $x-\alpha_i\ (1 \le i \le k)$ と，判別式が負の実係数2次因子 $x^2+\beta_i x+\gamma_i (1 \le i \le l)$ により，

$$g(x) = \prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i)^{\rho_i} \prod_{i=1}^{l}(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^{\sigma_i}$$

と因数分解できる．これらの1次因子，2次因子は互いに素とする．

［定理１］（部分分数分解）

実係数のm次式を

$$f(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x+a_0\,, a_i\in\mathbf{R}(0\le i\le m), a_m\ne 0$$

とする．このとき，有理式$f(x)/g(x)$は以下のように分解される．

$$\frac{f(x)}{g(x)}=q(x)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\rho_i}\frac{a_{ij}}{(x-\alpha_i)^j}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{\sigma_i}\frac{b_{ij}x+c_{ij}}{(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^j}. \tag{4.1}$$

ここで，$q(x)$は$f(x)$を$g(x)$で割った章である．分解の係数，$\{a_{ij}\},\{b_{ij}\},\{c_{ij}\}$は一通りに決まる．

（証明）技法1，2，3により，順次次数の低い有理式の部分分数分解に帰着できるので，分解の可能性は保証できる．

分解の一意性を示す．2種類の分解があれば，その差を取ると

$$D(x)=r(x)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\rho_i}\frac{a_{ij}}{(x-\alpha_i)^j}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{\sigma_i}\frac{b_{ij}x+c_{ij}}{(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^j}=0$$

の形式の等式が得られる．係数は，2つの分解の係数の差である．$\lim_{x\to\infty}D(x)=0$ より，$r(x)$の係数は全て0である．また，任意の$1\le i\le k$において，$\lim_{x\to\alpha_i}D(x)=0$ より，$a_{ij}=0\,(1\le j\le\rho_i)$である．最後に，任意の$1\le i\le l$において，2次式$x^2+\beta_i x+\gamma_i$の共役複素根のひとつを$\lambda_i$とすると，$\lim_{x\to\lambda_i}D(x)=0$ より，$b_{ij}\lambda_i+c_{ij}=0(1\le j\le\rho_i)$である．同じく，$b_{ij}\bar{\lambda}_i+c_{ij}=0(1\le j\le\rho_i)$で，$\mathrm{Im}\{\lambda_i\}\ne 0$ ゆえ，$b_{ij}=0, c_{ij}=0(1\le j\le\rho_i)$である．結局，2つの分解は全ての係数が相等しい．//