Chapter 1 演習問題詳解

§1

1.1 (1) ・$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{1}{2}g(x)-1=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{4}+2\right)-1=\dfrac{x^2}{8}$.

・$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\dfrac{1}{4}f(x)^2+2=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{x}{2}-1\right)^2+2=\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{x}{4}+\dfrac{9}{4}$.

・$f(y)=\dfrac{1}{2}y-1=x$ を y について解いて，$f^{-1}(x)=y=2(x+1)$．

・$g(y)=\dfrac{y^2}{4}+2=x$ を $0\le y\le 2$ について解いて，$g^{-1}(x)=y=2\sqrt{x-2}$．

(2) ・$(f\circ g)(y)=\dfrac{y^2}{8}=x$ を $0\le y\le 2$ について解いて，$(f\circ g)^{-1}(x)=y=2\sqrt{2x}$．

・$(g^{-1}\circ f^{-1})(x)=g^{-1}(f^{-1}(x))=2\sqrt{f^{-1}(x)-2}=2\sqrt{2(x+1)-2}=2\sqrt{2x}$．

・以上より，$(f\circ g)^{-1}(x)=2\sqrt{2x}=(g^{-1}\circ f^{-1})(x)$．

§2

2.2 $f(x)=g(x)=x^2\ \ (x\le 1), f(x)=h(x)=ax+b\ \ (x>1)$ とする．$x<1$ で $f'(x)=2x$，$x>1$ で $f'(x)=a$ ゆえ $f(x)$ は微分可能．$x=1$ のとき，右微分は

$$f'_+(1)=\lim_{d\to+0}\frac{f(1+d)-f(1)}{d}=\lim_{d\to+0}\frac{h(1+d)-g(1)}{d}=\lim_{d\to+0}\frac{a(1+d)+b-1}{d}=\lim_{d\to+0}\left(a+\frac{a+b-1}{d}\right).$$

$a+b-1=0$ のときに限り，右辺は収束して $f'_+(1)=a$ となる．これが左微分 $f'_-(1)=g'(1)=2$ と一致するので，$a=2$．よって，$a+b-1=0$ より，$b=-1$ である．

2.3 (1) $\left((3x-2)\sqrt{x^2+1}\right)'=3\sqrt{x^2+1}+(3x-2)\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{6x^2-2x+3}{\sqrt{x^2+1}}$.

(2) $\left(\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2\right)'=\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right)'=2+\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}$.

(3) $\left(\dfrac{(5x-4)^2}{\sqrt{2x+3}}\right)'=\dfrac{10(5x-4)\sqrt{2x+3}-(5x-4)^2\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}}{2x+3}=\dfrac{(5x-4)(15x+34)}{(2x+3)\sqrt{2x+3}}$.

(4) $\left(\sqrt{\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}}}\dfrac{2x(a^2-x^2)+2x(a^2+x^2)}{(a^2-x^2)^2}=\dfrac{2a^2x}{(a^2-x^2)\sqrt{a^4-x^4}}$.　$u=\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$ とした．

§3

3.2

(1) $x>0$ のとき，$\left(\log x\right)' = \dfrac{1}{x}$． $x<0$ のとき，$u=-x$ として，$\left(\log(-x)\right)' = \dfrac{du}{dx}\dfrac{d\log u}{du} = -\dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{x}$．

以上より，$\left(\log|x|\right)' = \dfrac{1}{x}$．

(2) $u = \dfrac{x-a}{x+a}$ と置き，$\left(\dfrac{1}{2a}\log\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|\right)' = \dfrac{1}{2a}\dfrac{1}{\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)}\dfrac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)^2} = \dfrac{1}{x^2-a^2}$.

(3) $\left(x^2 3^x\right)' = \left(x^2 e^{x\log 3}\right)' = 2xe^{x\log 3} + x^2(\log 3)e^{x\log 3} = ((\log 3)x^2+2x)3^x$.

(4) $\left(x\sqrt{x^2+a^2}\right)' = \sqrt{x^2+a^2} + x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

$$\left(a^2\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\right)' = \frac{a^2}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right) = \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

$$\therefore \left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\right)' = \sqrt{x^2+a^2} + \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}} = 2\sqrt{x^2+a^2}.$$

(5) $y = x^{(e^x)}$ と置くと，$\log y = e^x\log x$．両辺 x で微分して，$\dfrac{y'}{y} = e^x\log x + \dfrac{1}{x}e^x$.ゆえに，

$$y' = \left(e^x\log x + \frac{1}{x}e^x\right)y = \left(\log x + \frac{1}{x}\right)e^x x^{(e^x)}.$$

(6) 根号の中は非負ゆえ，$(x+1)(x+2)>0$．よって，$(x+1)(x+2) = |x+1||x+2|$．ゆえに，

$y = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x+2)}} = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{|x+1||x+2|}}$ と置くと，$\log y = \dfrac{1}{2}\left(\log(x^2+1) - \log|x+1| - \log|x+2|\right)$．両辺微分

して，$\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}\right) = \dfrac{3x^2+2x-3}{2(x+1)(x+2)(x^2+1)}$．ゆえに，

$$y' = \left(\frac{3x^2+2x-3}{2(x+1)(x+2)(x^2+1)}\right)y = \left(\frac{3x^2+2x-3}{2(x+1)(x+2)(x^2+1)}\right)\sqrt{\frac{x^2+1}{(x+1)(x+2)}} = \frac{3x^2+2x-3}{2\sqrt{(x+1)^3(x+2)^3(x^2+1)}}.$$

§4

4.3 (1) $\left(\cos^2(4x+5)\right)' = 2\cos(4x+5)\left(-4\sin(4x+5)\right) = -4\sin(8x+10)$． $u=\cos(4x+5)$ と置いた．

(2) $\left(\log|\cos x|\right)' = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$． $u=\cos x$ と置いた．

(3) $\left(2x\tan^{-1}x - \log(1+x^2)\right)' = \left(2\tan^{-1}x + \dfrac{2x}{1+x^2}\right) - \left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = 2\tan^{-1}x$.

§5

5.3 (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x-\sin x}\overset{L}{=}\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{1}{\cos^2 x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{-(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x(1-\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{-(1+\cos x)}{\cos^2 x}=\frac{-(1+1)}{1}=-2$．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}\overset{L}{=}\cdots\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots2\cdot1}{e^x}=0$．ロピタルを$n$回.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{\log(x-1)}{\log(x^2-1)}\overset{L}{=}\lim_{x\to1+0}\frac{\left(\dfrac{1}{x-1}\right)}{\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)}=\lim_{x\to1+0}\frac{x+1}{2x}=1$．

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+e^x)}{x}\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{-x}+1}=1$．

(5) $y=(\cos x)^{1/x^2}$ と置くと，$\displaystyle\lim_{x\to0}\log y=\lim_{x\to0}\frac{\log\cos x}{x^2}\overset{L}{=}\lim_{x\to0}\frac{\left(\dfrac{-\sin x}{\cos x}\right)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{2\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{-1}{2}\cdot1=\frac{-1}{2}$.

ゆえに，$\displaystyle\lim_{x\to0}y=\lim_{x\to0}e^{\log y}=e^{-1/2}$．

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}x}{x^{-1}}\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(-\dfrac{1}{1+x^2}\right)}{-x^{-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{-2}+1}=1$．

§6

6.1 (1) 部分分数分解で，$f(x)=\dfrac{x}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{1}{a-b}\left(\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{b}{x-b}\right)$．これと，

$$\left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-a)^n},\ \left(\frac{1}{x-b}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-b)^n}$$

より，

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{a-b}\left(\frac{a(-1)^n n!}{(x-a)^n}-\frac{b(-1)^n n!}{(x-b)^n}\right)=\frac{(-1)^n n!}{a-b}\left(\frac{a}{(x-a)^n}-\frac{b}{(x-b)^n}\right).$$

(2) $f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ より，1回微分すると，$\sqrt{2}$ 倍され，

sineの位相が$\dfrac{\pi}{4}$進む．ゆえに，n回微分すると$\left(\sqrt{2}\right)^n$倍され，sineの位相が$\dfrac{n\pi}{4}$進む．すなわち，

$$f^{(n)}(x)=\left(\sqrt{2}\right)^n e^x\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)=2^{n/2}e^x\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)\cdots①$$

が分かる．これで公式①が発見されたが，釈然としなければ，次のように①を帰納法で確かめる．①は，$n=0$のとき正しい．またnで①が正しいとき，

$$f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}(x)\right)'=2^{n/2}\left\{e^x\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)\right\}'=2^{n/2}e^x\left\{\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)\right\}$$
$$=2^{n/2}e^x\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=2^{(n+1)/2}e^x\sin\left(x+\frac{(n+1)\pi}{4}\right).$$

ゆえに，$n+1$でも正しい．よって，任意のnで①が成り立つ．

○証明問題：(1), (2), (3)のどれかが定期試験に出題される．

［補題A］任意実数xについて $\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0$．//

(1) 補題Aを用いて，有限マクローリン展開

$$e^x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n \ (0<\theta<1)$$

から，マクローリン展開$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$が成り立つことを証明せよ．

（証明）補題Aより，

$$0\le\lim_{n\to\infty}\left|e^x-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n\right|\le\lim_{n\to\infty}\frac{e^{|x|}}{n!}|x|^n=e^{|x|}\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0.$$

ゆえに，挟み撃ちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty}\left|e^x-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}\right|=0.$$

すなわち，無限級数は収束して，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x.\ //$$

(2) 補題Aを用いて，有限マクローリン展開

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}+\frac{(-1)^n\cos(\theta x)}{(2n)!}x^{2n} \ (0<\theta<1)$$

から，マクローリン展開$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$が成り立つことを証明せよ．

（証明）補題Aと$|\cos x|\le 1$より，

$$0\le\lim_{n\to\infty}\left|\cos x-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cos\theta x}{(2n)!}x^{2n}\right|\le\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}=0.$$

ゆえに，挟み撃ちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\cos x-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right|=0\,.$$

すなわち，無限級数は収束して，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}=\cos x\,.\quad //$$

(3) 補題Aを用いて，有限マクローリン展開

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\frac{(-1)^n\cos(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\ (0<\theta<1)$$

から，マクローリン展開 $\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ が成り立つことを証明せよ．

（証明）補題Aと $|\cos x|\le 1$ より，

$$0\le\lim_{n\to\infty}\left|\sin x-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right|\le\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}=0\,.$$

ゆえに，挟み撃ちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sin x-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right|=0\,.$$

すなわち，無限級数は収束して，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sin x\,.\quad //$$