

微積分学I 第8回 まとめ

1. 3つの水槽A, B, Cがあり, Aには, ハダカデバネズミが3匹, オオグソクムシが2匹, Bには, ハダカデバネズミが2匹, オオグソクムシが5匹入っている. 水槽Cには何も入っていない.

水槽A, Bから, それぞれ1匹ずつ無作為に取り出し, 水槽Cに入れる. その後, 水槽Cから1匹を無作為に取り出す.

- (1) 水槽Cからハダカデバネズミが取り出される確率を求めよ.
- (2) 水槽Cからハダカデバネズミが取り出されたとき, そのハダカデバネズミが水槽Aにいたものである確率を求めよ.

2. 以下の空欄を埋めよ(理由も説明せよ).

ある冬の日, 大雪のため交通機関に遅れが生じ, 1時限目の授業に多くの遅刻者が出た. このことについて, 3人の留学生(ソウオン, シンビ, オムジ)が次のように主張した.

ソウオン: 遅刻した学生は電車とバスの両方を利用していた.

シンビ: 電車もバスも利用しなかった学生は遅刻しなかった.

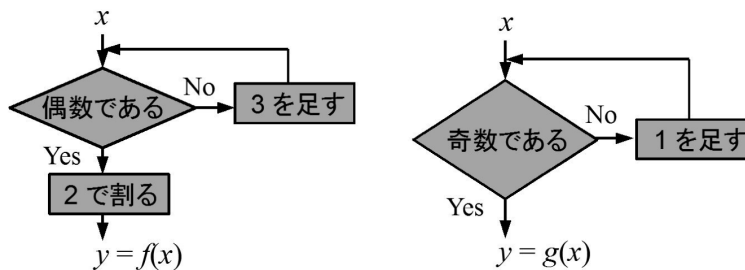
オムジ: 電車を利用しなかった学生は遅刻しなかった.

3人の主張の論理関係は次のようになる. ア が正しいとき, 必ず イ が正しい. また,

イ が正しいとき, 必ず ウ が正しい.

ヒント: 対偶とド・モルガンの法則を用いて, シンビとオムジの主張を「遅刻した学生は...」のように書き直すとよい.

3. 整数全体の集合を \mathbb{Z} と表す. f, g を次の図(フローチャート)で定まる整数全体の集合から整数全体の集合への関数とし, $\varphi = g \circ f$ とおく.



- (1) $\varphi(21)$ を求めよ.
- (2) $\varphi(x)=13$ となる整数 $x \in \mathbb{Z}$ をすべて求めよ.

4. 空気抵抗が無視できる場合, 斜方投射された質点の位置座標は

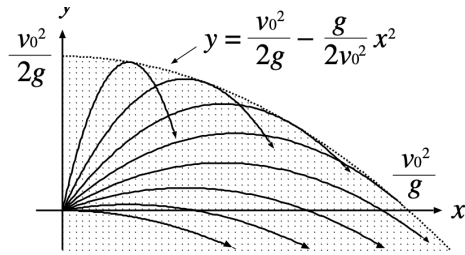
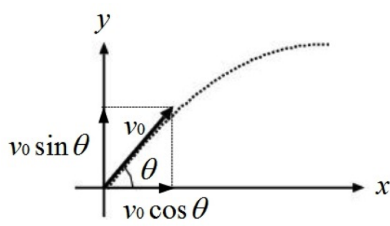
$$x(t) = (v_0 \cos \theta)t, \quad y(t) = (v_0 \sin \theta)t - \frac{g}{2}t^2 \quad (3)$$

と表される(下の左の図参照).ここで, $v_0 > 0$ は初速度の大きさ, $\theta (-\frac{1}{2}\pi < \theta \leq \frac{1}{2}\pi)$ は投射の角度, g は重力加速度である.

- (1) 座標の式(3)から t を消去し, 質点の描く軌道(曲線)を表す式を求めよ (y を $x, g, v_0, \tan \theta$ の式で表せ).
- (2) v_0 は固定し, θ を $-\frac{1}{2}\pi < \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ の範囲で動かすとき, $x > 0$ で質点の到達可能な範囲(下の右の図網かけ部分)は

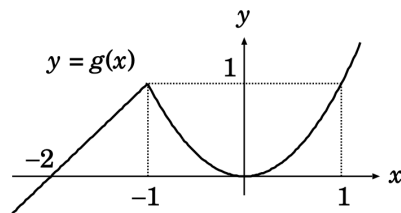
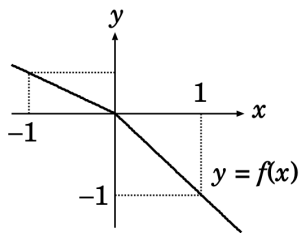
$$y \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2 \quad (4)$$

であることを示せ.



5. 関数 $f(x) = \begin{cases} -x & (x \geq 0), \\ -\frac{x}{2} & (x < 0), \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0), \\ x+2 & (x < 0), \end{cases}$ を考える(下図). 合成関数 $\varphi(x) = g(f(x))$ について,

$\varphi'(-1), \varphi'(0), \varphi'(1)$ を求めよ. 微分係数が存在しない場合は「存在しない」と書くこと.



ヒント: $\varphi'(-1)$ は合成関数の微分則. $\varphi'(0), \varphi'(1)$ は左微分と右微分が一致するかどうか調べる.

6. 2つの数 $a = 0.99^{99}$ と $b = 1.01^{-1.01}$ の大小を比較せよ.

ヒント: 関数 $f(x) = \frac{(1-x)^{99}}{(1+x)^{-101}}$ を考えるとよい. $f(0.01) = \frac{a}{b} \stackrel{>}{=} 1$ なら, $a \stackrel{>}{=} b$ である.

7. 八事製鉄所と本山銅精錬所が4km離れて建っている. この2つを結ぶ線分上, 製鉄所から x km ($0.1 \leq x \leq 3.9$) の位置における粒子状物質(particulate matter, PM, マイクロメートルの大きさの微粒子のことで, 粉塵や排気ガスなどの大気汚染物質を指す)の濃度は

$$C(x) = \frac{8k}{x^2} + \frac{27k}{(4-x)^2}$$

と表される. ただし, k は正の定数である.

(1) $C'(x)$ を求めよ.

(2) 八事製鉄所と本山銅精錬所を結ぶ直線上に病院を建てるとしたら, 製鉄所から何km離れたところに建てるのが一番マシだと考えられるか.