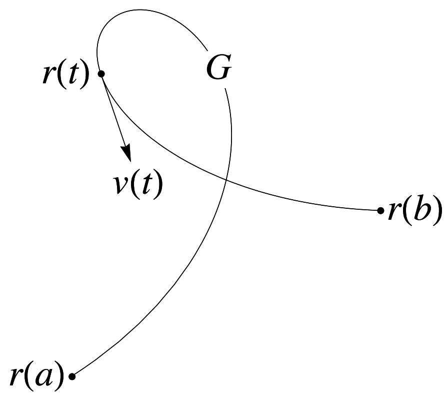
微積分学I 第7回 微分の応用

1．平面上の点の運動



・時刻 t での点の位置： $\boldsymbol{r}(t)=(f(t),g(t))$

・時刻 $a\le t\le b$ での点の軌跡 $G=\{\boldsymbol{r}(t)|a\le t\le b\}$

・時刻 t 〜 $t+\Delta t$ の移動： $\Delta\boldsymbol{r}=\big(f(t+\Delta t)-f(t),g(t+\Delta t)-g(t)\big)$

・平均速度ベクトル： $\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\left(\dfrac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t},\dfrac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}\right)$

(時刻 t 〜 $t+\Delta t$ は直線運動とみなし，運動方向と速さを表す)

$$\downarrow \Delta t\to 0$$

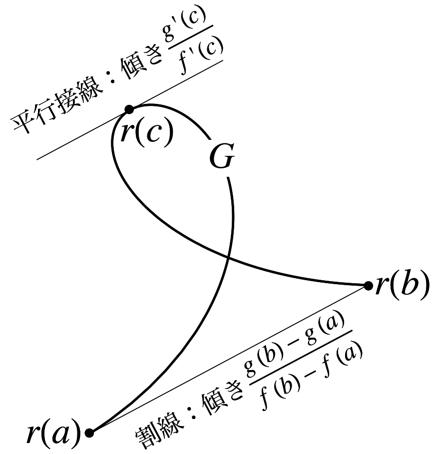
・速度ベクトル　　：$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{r}'(t)=(f'(t),g'(t))$

(時刻 t における運動方向と速さを表す．傾き $\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$)

・速さ： $v(t)=\|\boldsymbol{v}(t)\|=\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}$

☆ 速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$ は位置 $\boldsymbol{r}(t)$ における軌跡 G の接線と平行．//

2．コーシーの平均値の定理



［**定理1**］**(コーシーの平均値の定理)** $f(t),g(t)$ が4条件

①区間 $[a,b]$ で連続，

② (a,b) で微分可能，

③ $f(a)\ne f(b)$ ，

④ $\boldsymbol{v}(t)=(f'(t),g'(t))\ne(0,0)$　$(a<t<b)$

(速度ベクトルは零にならない)

をみたせば， $a<c<b$ なる c が存在して， $\dfrac{g'(c)}{f'(c)}=\dfrac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}$ となる．//

（証明） $F(t)=(g(t)-g(a))-\dfrac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}(f(t)-f(a))$ と置くと，

$$F(a)=\underbrace{\big(g(a)-g(a)\big)}_{0}-\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}\underbrace{\big(f(a)-f(a)\big)}_{0}=0,$$

$$F(b)=\big(g(b)-g(a)\big)-\underbrace{\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}\big(f(b)-f(a)\big)}_{g(b)-g(a)}=0$$

よって，ロルの定理より， $a<c<b$ なる c が存在して，

$$F'(c)=g'(c)-\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}f'(c)=0.\qquad \therefore g'(c)=\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}f'(c) \tag{1}$$

ここで， $f'(c)=0$ なら $g'(c)=0$ ゆえ，条件④に反する．ゆえに， $f'(c)\ne 0$ ．そこで，式(1)の両辺を $f'(c)$ で割って，求める等式を得る．//

3．ロピタルの定理　不定形の極限

［定理3］(l' Hospitalの定理) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$ が $\dfrac{0}{0}$ 型，$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型**不定形**なら，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}$．

このことは，片極限でも，$a=\infty,-\infty$ でも成立する．

($\dfrac{0}{0}$ 型の証明はノートに掲載．$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型の証明は**http://www.st.nanzan-u.ac.jp/info/sugiurah**)．//

［注意］**Hospitalゆえ，不定形(病気)でないものに用いることは不可．** $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x}{x^2}=\frac{1}{2}\neq\lim_{x\to 2}\frac{1}{2x}=\frac{1}{4}$．

○ この授業では，ロピタルの定理による式変形は $\overset{L}{=}$ で結び，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}\overset{L}{=}\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}$ と書くことにする．

［例1］$\dfrac{0}{0}$ 型 $\left(\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{0}{0}\right)$：$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$．

［例2］$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型 $\left(\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$：$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}}\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x^{-1}}{\frac{1}{2}x^{-1/2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^{1/2}}=0$．

［例3］$0\times\infty$ 型 $\left(\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)\times g(x)=0\times(\pm\infty)\right)$：$\dfrac{\infty}{0^{-1}}=\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，$\dfrac{0}{\infty^{-1}}=\dfrac{0}{0}$ 型に変形する．

$$\lim_{x\to+0}x\log x=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x^{-1}}\overset{L}{=}\lim_{x\to+0}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0\,.$$

［例4］1^{∞} 型 $\left(\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=1^{\pm\infty}\right)$：$F(x)=f(x)^{g(x)}$ とすると，$E=\displaystyle\lim_{x\to a}\log F(x)=\lim_{x\to a}g(x)\log f(x)$ は $\infty\times 0$ 型．

E をロピタルで求め，$\displaystyle\lim_{x\to a}F(x)=\lim_{x\to a}e^{\log F(x)}=e^{E}$ とする．

例えば，$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/\sin x}$ について，$F(x)=(1+x)^{1/\sin x}$ と置くと，

$$\lim_{x\to 0}\log F(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{\sin x}\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x)\cos x}=1.$$

$$\therefore\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}e^{\log F(x)}=e^{1}=e.$$

［例5］0^0 型 $\left(\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=0^0\right)$：$F(x)=f(x)^{g(x)}$ とすると，$E=\displaystyle\lim_{x\to a}\log F(x)=\lim_{x\to a}g(x)\log f(x)$ は $0\times\infty$ 型．

E をロピタルで求め，$\displaystyle\lim_{x\to a}F(x)=\lim_{x\to a}e^{\log F(x)}=e^{E}$ とする．

練習問題

次の極限を求めよ．ロピタルの定理による変形は $\overset{L}{=}$ で結べ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^a}$ $(a>0)$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{\log(x-1)}{\log(x^2-1)}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x-\sin x}$

第7回練習問題解答

次の極限を求めよ．ロピタルの定理による変形は $\overset{L}{=}$ で結べ．（各2点）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^a}$ $(a>0)$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{\log(x-1)}{\log(x^2-1)}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to0}(\cos x)^{1/x^2}$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x-\sin x}$

解答

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=0.$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^a}\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x^{-1}}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{ax^a}=\frac{1}{\infty}=0.$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{\log(x-1)}{\log(x^2-1)}\overset{L}{=}\lim_{x\to1+0}\frac{1/(x-1)}{2x/(x^2-1)}=\lim_{x\to1+0}\frac{(x^2-1)}{2x(x-1)}=\lim_{x\to1+0}\frac{x+1}{2x}=\frac{1+1}{2\cdot1}=1.$

(4) $F(x)=(\cos x)^{1/x^2}$ と置く．

$$\lim_{x\to0}\log F(x)=\lim_{x\to0}\frac{\log\cos x}{x^2}\overset{L}{=}\lim_{x\to0}\frac{\left(\dfrac{-\sin x}{\cos x}\right)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{2\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{-1}{2}\cdot1=\frac{-1}{2}.$$

$$\therefore\lim_{x\to0}F(x)=\lim_{x\to0}e^{F(x)}=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x-\sin x}\overset{L}{=}\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{1}{\cos^2 x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x-1}{(1-\cos x)\cos^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{(1-\cos x)\cos^2 x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-(\cos x+1)}{\cos^2 x}=\frac{-(1+1)}{1}=-2.$$

あるいは，ロピタルの定理を部分的に用いて，

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x-1}{(1-\cos x)\cos^2 x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos^2 x-1}{1-\cos x}\right)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\overset{L}{=}\lim_{x\to0}\left(\frac{-2\sin x\cos x}{\sin x}\right)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

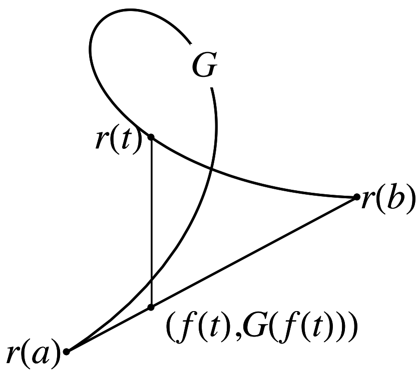
$$=\lim_{x\to0}\frac{-2}{\cos x}=\frac{-2}{1}=-2.$$

ノート

1．定理1の補助関数 $F(t)$ の作り方．

曲線 G の端点 $\boldsymbol{r}(a)=(f(a),g(a))$，$\boldsymbol{r}(b)=(f(b),g(b))$ を通る割線の方程式：

$$y=G(x)=g(a)+\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}(x-f(a))\,.$$



割線のパラメタ表示：$(x,y)=\big(f(t),G(f(t))\big)$ $(a\le t\le b)$．

曲線 G 上の点 $\boldsymbol{r}(t)=\big(f(t),g(t)\big)$ と割線上の点 $\big(f(t),G(f(t))\big)$ の y 座標の差を

$$F(t)=g(t)-G(f(t))$$

と置く．

曲線 G と割線は2点 $\boldsymbol{r}(a)=(f(a),g(a))$，$\boldsymbol{r}(b)=(f(b),g(b))$ で交わるので，そこでの y 座標は一致し，

$$F(a)=F(b)=0\,.$$

2．$\dfrac{0}{0}$ 型ロピタルの定理の証明

$f(a)=0\left(=\lim\limits_{x\to a}f(x)\right)=0,\ g(a)=0\left(=\lim\limits_{x\to a}g(x)\right)$ と定めると，$f(x),g(x)$ は $x=a$ で連続となる．極限の問題なので，$x\neq a$ とする．

まず，コーシーの平均値の定理より，x,a の内分点 c が存在して，

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g(x)-g(a)}{f(x)-f(a)}=\frac{g'(c)}{f'(c)}\,. \qquad ①$$

最後の等式で，$f(a)=g(a)=0$ を用いた．

ここで，c は x,a の内分点ゆえ，② $x\to a$ なら $c\to a$．

よって，

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}\overset{①}{=}\lim_{x\to a}\frac{g'(c)}{f'(c)}\overset{②}{=}\lim_{c\to a}\frac{g'(c)}{f'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}\,.$$

最後の等式は変数 c を変数 x に置き換えたものである．//