微積分学I 第6回 平均値の定理

1．三角関数・逆三角関数

［定理1］**(三角関数の微分公式)**

$$① \ \frac{d}{dx}\sin x=\cos x, \quad ② \ \frac{d}{dx}\cos x=-\sin x, \quad ③ \ \frac{d}{dx}\tan x=\frac{1}{\cos^2 x}. \ //$$

［定理2］**(逆三角関数の微分公式)**

$$① \ \frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad ② \ \frac{d}{dx}\cos^{-1}x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad ③ \ \frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{1+x^2}. \ //$$

（証明）① $y=\sin^{-1}x$ と置くと， $\sin y=x$．また， y は主値の範囲 $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ にあるので,

$$\cos y=+\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}. \quad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

② $y=\cos^{-1}x$ と置くと， $\cos y=x$．また， y は主値の範囲 $0\le y\le\pi$ にあるので,

$$\sin y=+\sqrt{1-\cos^2 y}=\sqrt{1-x^2}. \quad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}=\frac{1}{-\sin y}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

③ $y=\tan^{-1}x$ と置くと， $\tan y=x$, $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y=1+x^2$． $\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}=\frac{1}{1+x^2}$． //

2．平均値の定理　割線と接線の関係

△ 曲線上の2点 A,B を結ぶ線分 $\overline{AB}$ を割線という.

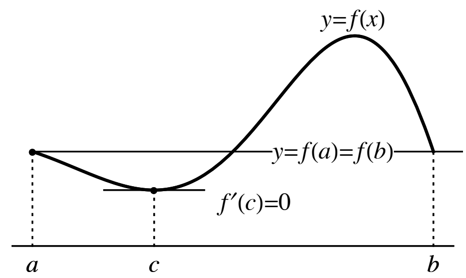
［定理3］**(ロルの定理＝特殊版平均値の定理)** $f(x)$ が3条件

①区間 $[a,b]$ で連続,

② (a,b) で微分可能,

③ $f(a)=f(b)$

をみたせば， $a<c<b$ なる c が存在して， $f'(c)=0$ となる．//



［定理4］**(平均値定理)** $f(x)$ が2条件

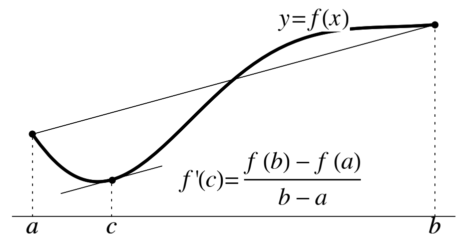
①区間 $[a,b]$ で連続,

② (a,b) で微分可能

をみたせば， $a<c<b$ なる c が存在して,

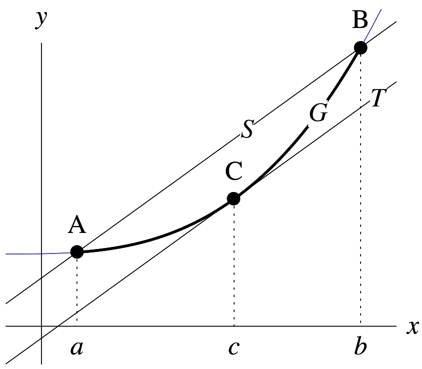
$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

となる．//



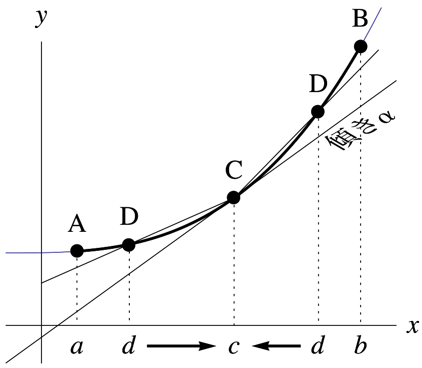
＜点 $(c,f(c))$ における接線は，点 $(a,f(a)),(b,f(b))$ を結ぶ割線と傾きが等しい．＞

（証明概略）右図のように，曲線 $y=f(x)$ 上の2点 $\mathrm{A}(a,f(a))$ と $\mathrm{B}(b,f(b))$ を結ぶ曲線の弧を G，この 2 点を通る割線を S とする．G 上の点で S との距離が最大の点を $\mathrm{C}(c,f(c))$ とする．C を通り S と平行な直線を T とする．S と T の傾きは，共に $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ である．T は C における曲線の接線であるから，傾きは $f'(c)$ でもある．ゆえに，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=T\text{の傾き}=f'(c)$．//



（下線部補足）T は，傾き $\alpha=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ が $f'(c)$ と等しく，G の接線となることを示す．C は S より下にあるとする．上にある場合も同様に証明できる．挟み打ちで $\alpha\le f'(c)\le\alpha$ を示せば十分である．

① $f'(c)\le\alpha$ を示す．G の部分弧 $\overset{\frown}{\mathrm{CB}}$ 上に点 $\mathrm{D}(d,f(d))$ をとる．D は T 上か，それより上方にあるので，割線 CD の傾き $\dfrac{f(d)-f(c)}{d-c}\ge\alpha$．ゆえに，$f'(c)=\displaystyle\lim_{d\to c+0}\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\ge\alpha$．



② $f'(c)\ge\alpha$ を示す．G の部分弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ 上に点 $\mathrm{D}(d,f(d))$ をとる．D は T 上か，それより上方にあるので，割線 CD の傾き $\dfrac{f(c)-f(d)}{c-d}\le\alpha$．ゆえに，$f'(c)=\displaystyle\lim_{d\to c-0}\frac{f(d)-f(c)}{d-c}\le\alpha$．//

［**例1**］ $f(x)=\sqrt{1-x^2},a=0,b=1$ について，定理2の c を求めよ．

$f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ である．方程式 $f'(c)=\dfrac{-c}{\sqrt{1-c^2}}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{f(1)-f(0)}{1}=0-1=-1$ を解けばよい．

$$\sqrt{1-c^2}=c \Rightarrow 1-c^2=c^2 \Rightarrow c^2=\frac{1}{2} \Rightarrow c=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \overset{0<c<1}{\Rightarrow} c=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

［**例2**］(平均値の定理の応用) $a>b>0$ のとき，$\dfrac{1}{a}<\dfrac{\log a-\log b}{a-b}<\dfrac{1}{b}$ を示す.

$f(x)=\log x$ と置くと，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$．平均値の定理より，$b<c<a$ が存在して，$\dfrac{\log a-\log b}{a-b}=\dfrac{1}{c}$．これと $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{b}$ より，求める不等式を得る．//

第 6 回練習問題

(1) $a>0$ のとき，不等式 $1<\dfrac{e^a-1}{a}<e^a$ を証明せよ.

(2) $a\ne b$ のとき，不等式 $|\sin a-\sin b|\le|a-b|$ を証明せよ.

第 6 回練習問題

(1) $a>0$ のとき，不等式 $1<\dfrac{e^a-1}{a}<e^a$ を証明せよ．　(5点)

(2) $a\neq b$ のとき，不等式 $|\sin a-\sin b|\leq|a-b|$ を証明せよ．　(5点)

解答

(1)

①区間 $[0,a]$ で関数 $f(x)=e^x$ を考える．　(1 点)

②平均値の定理より， $0<c<a$ が存在して， $\dfrac{e^a-1}{a}=\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}=f'(c)=e^c$ ．　(2 点)

③これと， $1=e^0<e^c<e^a$ より，求める不等式を得る．// (2 点)

(2)

①区間 $[a,b]$ で関数 $f(x)=\sin x$ を考える．　(1 点)

②平均値の定理より， $a<c<b$ が存在して，

$$\frac{\sin a-\sin b}{a-b}=\frac{\sin b-\sin a}{b-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)=\cos c\ .$$ (2 点)

③これと， $|\cos c|\leq 1$ より， $\left|\dfrac{\sin a-\sin b}{a-b}\right|\leq 1$ ．ゆえに， $|\sin a-\sin b|\leq|a-b|$ ．// (2 点)

次の３要素が必要．

　①で関数と区間を設定．

　②で平均値の定理を使う．

　③で不等式を示す．

これに相当する表現があればよい．

(2) 実は，$a \neq b$ なら $|\sin a - \sin b| < |a-b|$ である(等号は要らない).

まず，$\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| < 1 \ (x \neq 0) \cdots$① を示す.

$0 < |x| < \pi$ のとき，平均値の定理より，

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = f'(c) = \cos c \ \ (0 < |c| < |x| < \pi) .$$

$0 < |c| < |x| < \pi$ だから，$|\cos c| < 1$ ゆえ，求める不等式が成り立つ.

つぎに，$|x| \geq \pi$ のとき，

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{\pi} < 1$$

で成立.

さて，$\left|\cos\dfrac{a+b}{2}\right| \leq 1 \cdots$② だから，$d = \dfrac{a-b}{2}$ と置くと，

$$\left|\frac{\sin a - \sin b}{a-b}\right| \leq \left|\frac{2\sin\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{a+b}{2}}{a-b}\right| \overset{②}{\leq} \left|\frac{2\sin\dfrac{a-b}{2}}{a-b}\right| = \left|\frac{\sin d}{d}\right| \overset{①}{<} 1 . \ //$$