# 微積分学I 第5回 合成関数の微分

## 1．連続関数の性質

☆1 閉区間$[a,b]$で連続な関数$f(x)$は区間内で最小値，最大値をとる．

（$f(a_{\min}) = \min_{a \le x \le b} f(x)$, $f(a_{\max}) = \max_{a \le x \le b} f(x)$ となる $a_{\min}, a_{\max} \in [a,b]$ が存在する．）//

☆2 (**中間値の定理**) 閉区間$[a,b]$の連続関数$f(x)$は，$x \in [a,b]$で$f(a)$と$f(b)$の中間の値を全てとる．

($\alpha$が$f(a)$と$f(b)$の内分点なら，$f(c) = \alpha$となる$c \in [a,b]$が存在する．)//

## 2．微分

◎速度と微分：関数$y = f(x)$を数直線上の点Pの時刻$x$における位置と考える．

・ 時刻$x$から$x+\Delta x$までの平均速度：$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$　, $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

△ 導関数＝時刻$x$での速度：$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx} f(x)$.

［例1］低次単項式の微分

$$(1)' = \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = 0,$$
$$(x)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1,$$
$$\left(x^2\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2hx+h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x.$$

## 3．四則演算と微分

☆3 **四則演算と微分**

(1) 加減　：$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,

(2) 定数倍：$(kf(x))' = kf'(x)$,

(3) 乗　：$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

(4) 逆数　：$\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = -\dfrac{f'(x)}{f(x)^2}$,

(5) 除　：$\left(\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)' = \dfrac{f(x)g'(x) - f'(x)g(x)}{f(x)^2}$　$(f(x) \ne 0)$．//

☆4 **項別微分** $\left(af(x)+bg(x)+ch(x)\right)' = af'(x) + bg'(x) + ch'(x)$. (☆5(1), (2)を使って証明)//

☆5 **単項式の微分** $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$ （$n$は整数)．(☆5(3)と帰納法を使って証明)//

## 4．合成関数，逆関数の微分

☆6 **合成関数の微分**：$y = f(g(x)) = f(u), u = g(x)$とすると，

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))g'(x), \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}. \quad //$$

＜注＞ 高校の証明は少しいい加減.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

と書いてあるけど，$\Delta x \to 0$の最中に$\Delta u$が0になると最初の等号が作れない.

（証明） $\Delta u=0$ の可能性を考慮して， $f(x)$ に関する補助関数

$$\varepsilon_f=\varepsilon_f(u,\Delta u)=\begin{cases}\dfrac{f(u+\Delta u)-f(u)-f'(u)\Delta u}{\Delta u}, & \Delta u\neq 0,\\ 0, & \Delta u=0\end{cases}$$

を定義する． $\Delta u\neq 0$ ， $\Delta u=0$ に関わらず,

$$\varepsilon_f\Delta u=f(u+\Delta u)-f(u)-f'(u)\Delta u \quad \text{ゆえ} \quad f(u+\Delta u)=f(u)+(f'(u)+\varepsilon_f)\Delta u \cdots ①.$$

また， $\Delta u\to 0$ のとき $\varepsilon_f\to 0\cdots$②．なぜなら，

$$\varepsilon_f=\frac{f(u+\Delta u)-f(u)-f'(u)\Delta u}{\Delta u}=\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}-f'(u)\to f'(u)-f'(u)=0\ .$$

$\Delta x\neq 0$ なので， $g(x)$ に関する補助関数を

$$\varepsilon_g=\varepsilon_g(x,\Delta x)=\frac{g(x+\Delta x)-g(x)-g'(x)\Delta x}{\Delta x}$$

とすると，

$$g(x+\Delta x)=g(x)+(g'(x)+\varepsilon_g)\Delta x\cdots ③.$$

また， $\Delta x\to 0$ のとき $\varepsilon_g\to 0\cdots$④.

よって， $u=g(x),\Delta u=(g'(x)+\varepsilon_g)\Delta x\cdots$⑤として，

$$f(g(x+\Delta x))\overset{③}{=}f(g(x)+(g'(x)+\varepsilon_g)\Delta x)\overset{⑤}{=}f(u+\Delta u)\overset{①}{=}f(u)+(f'(u)+\varepsilon_f)\Delta u=f(u)+(f'(u)+\varepsilon_f)(g'(x)+\varepsilon_g)\Delta x\ .$$

$\Delta x\to 0$ のとき，⑤より $\Delta u\to 0$ だから，②と④より $\varepsilon_f\to 0,\ \varepsilon_g\to 0$ ．ゆえに，

$$\frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{\Delta x}=(f'(g(x))+\varepsilon_f)(g'(x)+\varepsilon_g)\to f'(g(x))g'(x)\quad(\Delta x\to 0)\text{．}//$$

☆7　$\left(f(ax+b)\right)'=af'(ax+b)$．

$y=f(ax+b)=f(u),u=ax+b$ とすると， $\left(f(ax+b)\right)'=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}=f'(ax+b)\cdot a=af'(ax+b)$．//

☆8 **逆関数の微分：** $y=f^{-1}(x),x=f(y)$ とすると，

$$\left(f^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))},\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)}$$

第2式で，左辺では $y=f^{-1}(x)$ は $x$ の関数，右辺では $x=f(y)$ は $y$ の関数である．//

（証明） $f(f^{-1}(x))=x$ の両辺を☆6を用いて微分すると， $f'(f^{-1}(x))\left(f^{-1}(x)\right)'=1$ ．両辺を $f'(f^{-1}(x))$ で割って，求める式を得る．//

## 第5回練習問題

次の関数を微分せよ．

(1) $y=x^3+x^2+x+1$　(2) $y=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2$　(3) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$　(4) $y=\sqrt{2x+1}$　(5) $y=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$

## 第5回練習問題

次の関数を微分せよ．配点各問2点

(1) $y = x^3 + x^2 + x + 1$　(2) $y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$　(3) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$　(4) $y = \sqrt{2x+1}$　(5) $y = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$

解答

(1) $y' = 3x^2 + 2x + 1$.

(2) $y' = 2\left(x + x^{-1}\right)\left(1 - x^{-2}\right) = 2x\left(1 + x^{-2}\right)\left(1 - x^{-2}\right) = 2x\left(1 - x^{-4}\right)$.　（合成関数の微分則）

$$y' = \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)' = 2x - 2x^{-3} = 2x^{-1}\left(x^2 - x^{-2}\right).$$　（展開して項別微分）

(3) $y' = \dfrac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$.

(4) $y' = \left\{(2x+1)^{1/2}\right\}' = 2 \cdot \dfrac{1}{2}(2x+1)^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

(5) 平方根の整理のとき，符号に注意．の中味 $\dfrac{1+x^2}{1-x^2} > 0$ だから，$1 - x^2 > 0 \cdots$①.

$u = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ とすると，$y = \sqrt{u}$，$u' = \left(\dfrac{2}{1-x^2} - 1\right)' = \dfrac{4x}{(1-x^2)^2}$ より，

$$y' = \underbrace{\boxed{\frac{1}{2\sqrt{u}}}}_{\frac{dy}{du}}\underbrace{\boxed{\frac{4x}{(1-x^2)^2}}}_{\frac{du}{dx}} = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}}\frac{4x}{(1-x^2)^2} \overset{①}{=} \frac{2x}{(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}} = \frac{2x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^4}}.$$

整理のしかたは色々．$y' = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2\sqrt{1+x^2}}$ でもよい．

# ノート

（☆2の証明：2分法） $f(a) < \alpha < f(b)$ とする． $f(b) < \alpha < f(a)$ のときも同様である． $a_0 = a, b_0 = b$ として，次の様にして2つの無限列 $\{a_k\}_{k\ge 0}, \{b_k\}_{k\ge 0}$ を再帰的に作る．

1．$c = (a_k + b_k)/2$ とする．

2．$f(c) \le \alpha$ なら $a_{k+1} = c, b_{k+1} = b_k$， $f(c) > \alpha$ なら $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = c$ とする．

$\{a_k\}_{k\ge 0}, \{b_k\}_{k\ge 0}$ は次の性質を持つ．

1．$\{a_k\}_{k\ge 0}$ は単調増加( $a_k \le a_{k+1}$ )で上に有界( $a_k < b$ )．

2．$\{b_k\}_{k\ge 0}$ は単調増加( $b_k > b_{k+1}$ )で下に有界( $b_k > a$ )．

3．$b_k - a_k = 2^{-1}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \cdots = 2^{-k}(b_0 - a_0)$.

4．$f(a_k) \le \alpha$， $f(b_k) > \alpha$．

性質1，2より， $\{a_k\}_{k\ge 0}, \{b_k\}_{k\ge 0}$ は収束する． $\lim_{k\to\infty} a_k = c, \lim_{k\to\infty} b_k = d$ と置くと，性質3より，

$$d - c = \lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty} 2^{-k}(b_0 - a_0) = 0\,.$$

ゆえに， $\lim_{k\to\infty} a_k = c = \lim_{k\to\infty} b_k$． さて， $f(x)$ は連続で，性質4より，

$$\alpha \le \lim_{k\to\infty} f(b_k) = f(c) = \lim_{k\to\infty} f(a_k) \le \alpha$$

である．//

（☆7の証明） $x = a$ における微分を考える．☆3より， $f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x + o(1)\Delta x$． また，$b = f(a), \Delta y = f'(a)\Delta x + o(1)\Delta x$ と置くと， $f(a + \Delta x) = f(a) + \Delta y = b + \Delta y$ だから，☆3を用いて，

$$g(f(a + \Delta x)) = g(y + \Delta y) = g(b) + g'(b)\Delta y + r(\Delta y)\Delta y\,, \lim_{\Delta y\to\infty} r(\Delta y) = 0\,.$$

ここで， $\Delta x \to 0$ なら $\Delta y \to 0$ ゆえ， $\lim_{\Delta x\to\infty} r(\Delta y) = 0$． すなわち， $r(\Delta y) = o(1)$． 以上より，

$$\begin{aligned} g(f(a + \Delta x)) &= g(b) + g'(b)(f'(a)\Delta x + o(1)\Delta x) + \underbrace{o(1)}_{r(\Delta y)}\Delta y \\ &= g(b) + g'(b)f'(a)\Delta x + g'(b)o(1)\Delta x + o(1)\Delta y \\ &= g(b) + g'(b)f'(a)\Delta x + \left(g'(b)o(1) + o(1)\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\Delta x. \end{aligned}$$

最右辺で， $g'(b)o(1) + o(1)\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = o(1)$ は明らか． また， $g'(b)f'(a)$ は $\Delta x$ によらないので，☆4より， $g(f(x))$ は $x = a$ 微分可能で， $\left(g(f(a))\right)' = g'(b)f'(a) = g'(f(a))f'(a)$． //