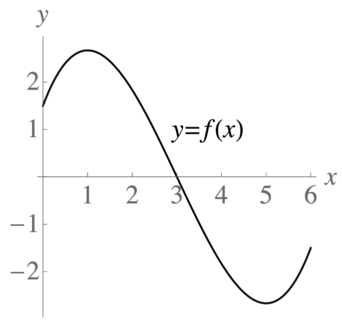
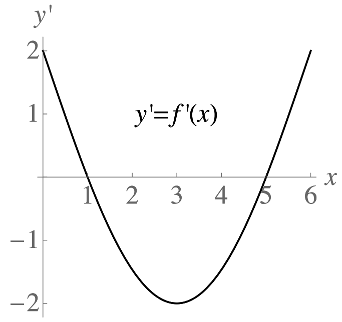
微積分学I 第4回 平均変化率と微分

1．関数のグラフから導関数のグラフを導く方法

増減表を逆に使って，関数のグラフを見て導関数のグラフを描くことができる．

［例題1］関数 $y = f(x)$ を測定し，グラフ(右図上)を描いた．これを見て，微係数 $y' = f'(x)$ のグラフの概形を書け．





$y = f(x)$ のグラフから，増減表を作る．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$	6
$f(x)$	$*$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	変曲点	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$*$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	2	$+$	0	$-$	-2	$-$	0	$+$	2

① グラフから凹凸，極大，極小，変曲点を読み，増減表に記録．

- $0 < x < 3$ で上に凸 $\Rightarrow$ $f''(x) < 0$ $\Rightarrow$ $f'(x)$ は単調減少．
- $x = 3$ に変曲点 $\Rightarrow$ $f''(3) = 0$ $\Rightarrow$ $f'(3)$ は極小．
- $3 < x < 6$ で下に凸 $\Rightarrow$ $f''(x) > 0$ $\Rightarrow$ $f'(x)$ は単調増加．

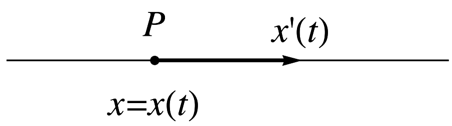
② グラフからの傾き $f'(x)$ を読み増減表に記録．特に極値で傾き $f'(x) = 0$．

- $f'(0) \cong 2, f'(1) \cong 0, f'(3) \cong -2, f'(5) \cong 0, f'(6) \cong 2$．

③ 増減表をみて，グラフ $y' = f'(x)$ の概形を描く(右図下)．

2．直線上の運動

x 軸上を動く点 P の座標が時刻 t の関数 $x = x(t)$ であるとする．



△ 位置の変化率 $x'(t)$ を**速度**と言う．**速さ**を $|x'(t)|$ で定義する．

△ 速度の変化率 $x''(t)$ を**加速度**と言う．

［**運動の第二法則(ニュートン)**］ $mx''(t) = Af(t)$．

ここで，物体の質量 m，物体に働く力 $f(t)$， A は定数である．

距離の単位をm(メートル)，質量の単位をkg(キログラム)，時間の単位をs(秒)とする．これを**MKS単位系**という．速度の単位は m/s，加速度の単位は $\mathrm{m/s^2} = (\mathrm{m/s})/\mathrm{s}$ である．

△ 1kgの物体に働くとき，$1\ \mathrm{m/s^2}$ の加速度を生じる様な力の大きさを1N(ニュートン)とする．

この様に単位をそろえると，運動の第二法則で $A = 1$ となり，次の方程式が得られる．

［**運動方程式**］ $mx''(t) = f(t)$．(高校と違って，両辺は等号を保ったまま時刻 t で変化する．)

［**落体の法則(ガリレオ)**］地表近くで，手を放した物体は一定加速度 $g = 9.8\mathrm{m/s^2}$ で落下する． g を**重力加速度**という．(ピサの斜塔の実験．9.8もガリレオの測定値．)

☆ 地上付近で， $m$kg の物体に働く重力は mgN である．(落体の法則と運動方程式より．)

［例題2］ 10t のトラックを， 100s で静止状態 $v(0) = 0$ から時速 3.6km に，定加速度で加速する力．

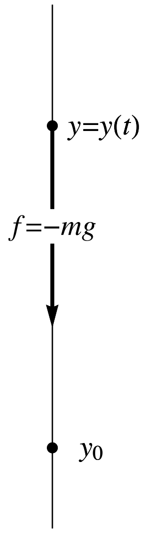
式 $mx''(t) = f(t)$ はMKS単位系で成り立つ．この式を使うときは単位をMKS単位系に揃えること．

最終速度は $v(100) = 3.6[\mathrm{km}]/1[\mathrm{h}] = 3600[\mathrm{m}]/3600[\mathrm{s}] = 1[\mathrm{m/s}]$．

加速度は $x''(t) = \dfrac{v(100) - v(0)}{100} = 10^{-2}[\mathrm{m/s^2}]$．質量は $m = 10\mathrm{t} = 10^4\mathrm{kg}$ だから，

力は $f(t)=mx''(t)=10^4\times10^{-2}=10^2\,\mathrm{N}$ (一定)．およそ重量計を目盛り $10^2/g\cong10.2\mathrm{kg}$ に押し込む力．

［例題3］ y_0 の高さにある質量 m の物体を，時刻0で速度 $v_0>0$ で真上に投げ上げたときの運動．



高さを $y(t)$ とすると，条件より $y_0=y(0), v_0=y'(0)$ である．

ニュートンの運動方程式 $my''(t)=-mg$ より， $y''(t)=-g$ (定数)．両辺を区間 $[0,t]$ で積分して

$$y'(t)-y'(0)=\left[y'(s)\right]_0^t=\int_0^t y''(s)\,ds=-\int_0^t g\,ds=-gt \text{ より，}\quad y'(t)=v_0-gt \cdots①.$$

さらに，①の両辺を区間 $[0,t]$ で積分して

$$y(t)-y(0)=\int_0^t v_0\,ds-g\int_0^t s\,ds=v_0t-\frac{1}{2}gt^2.$$

よって，

$$y(t)=y_0+v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \ \ (t\text{ の2次式}).$$

$y(t)$ が分かれば，色々な問題に答えられる．最高点の高さ，いつ最初の高さ y_0 に戻ってくるか，など．

3．平面上の運動

xy 平面上を動く質量 m の動点 P の位置をベクトル表示して， $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t))$ とする． $\boldsymbol{r}'(t)=(x'(t),y'(t))$ を速度(ベクトル)， $\boldsymbol{r}''(t)=(x''(t),y''(t))$ を加速度(ベクトル）という．また， $v(t)=\|\boldsymbol{r}'(t)\|=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$ を速さという． P に働く力を $\boldsymbol{f}(t)=(f(t),g(t))$ とすると，次の方程式が成り立つ．

［**運動方程式(2次元)**］ $m\boldsymbol{r}''(t)=\boldsymbol{f}(t)$．成分毎に書くと， $\begin{cases} mx''(t)=f(t), \\ my''(t)=g(t). \end{cases}$

［例題4］地上の点 $(0,0)$ にある物体を時刻 $t=0$ で仰角 θ 速さ v_0 で投げ上げたときの軌跡．

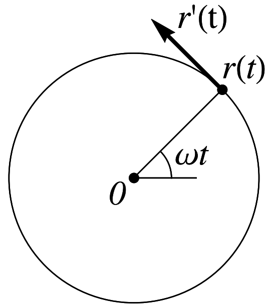
位置を $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t))$ とすると， $\boldsymbol{r}(0)=(x(0),y(0))=(0,0)$, $\boldsymbol{r}'(0)=(x'(0),y'(0))=v_0(\cos\theta,\sin\theta)$ である．

x 方向の運動方程式は $mx''(t)=0$．これより， $x''(t)=0$．2回積分して， $x(t)=v_0t\cos\theta \cdots①$.

y 方向の運動方程式は $my''(t)=-mg$．これより， $y''(t)=-g$．2回積分して． $y(t)=v_0t\sin\theta-\dfrac{1}{2}gt^2 \cdots②$.

①より， $t=\dfrac{x}{v_0\cos\theta}$．これを②に代入して，物体の軌跡は放物線 $y=x\tan\theta-\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$．

第4回練習問題



$a>0, \omega>0$ を定数とする．質量 m の質点が， xy 平面上で，

$$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t))=a(\cos\omega t,\sin\omega t)$$

で表される，原点を中心とした等速円運動をしている．

(1) 速度 $\boldsymbol{r}'(t)=(x'(t),y'(t))$ を求めよ．位置 $\boldsymbol{r}(t)$ と速度が直交することを示せ．

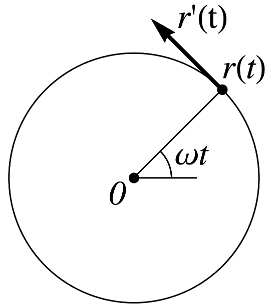
(2) 加速度 $\boldsymbol{r}''(t)=(x''(t),y''(t))$ を求めよ．速度と加速度が直交することを示せ．

(1), (2)は等速円運動と合致する．また，位置 $\boldsymbol{r}(t)$ と加速度が平行で向きが反対になる．

(3) 質点に働く力 $\boldsymbol{f}(t)=(f(t),g(t))$ を求めよ．運動方程式(2次元)を使う．

等速直線運動をしていない質点には何かの力が働いている．（運動の第１法則の対偶）

第4回練習問題



$a>0, \omega>0$ を定数とする．質量 m の質点が， xy 平面上で，

$$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t))=a(\cos\omega t,\sin\omega t)$$

で表される等速円運動をしている．

(1) 速度 $\boldsymbol{r}'(t)=(x'(t),y'(t))$ を求めよ．位置 $\boldsymbol{r}(t)$ と速度が直交することを示せ．

(2) 加速度 $\boldsymbol{r}''(t)=(x''(t),y''(t))$ を求めよ．速度と加速度が直交することを示せ．

このことは等速性と合致する．また，位置 $\boldsymbol{r}(t)$ と加速度が平行で向きが反対になる．

(3) 質点に働いている力 $\boldsymbol{f}(t)$ を求めよ．

解答

(1) （配点4点）

位置を t で微分して，速度は $\boldsymbol{r}'(t)=(x'(t),y'(t))=a(-\omega\sin\omega t,\omega\cos\omega t)=a\omega(-\sin\omega t,\cos\omega t)$． （部分点2点）

位置 $\boldsymbol{r}(t)$ との内積は， $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=a^2\omega\{(\cos\omega t)(-\sin\omega t)+(\sin\omega t)(\cos\omega t)\}=0$． ゆえに速度 $\boldsymbol{r}'(t)$ は位置 $\boldsymbol{r}(t)$ と直交する． （部分点2点）

(2) （配点4点）

速度を t で微分して，加速度は $\boldsymbol{r}''(t)=(x''(t),y''(t))=a\omega(-\omega\cos\omega t,-\omega\sin\omega t)=-a\omega^2(\cos\omega t,\sin\omega t)$． （部分点2点）

速度 $\boldsymbol{r}'(t)$ との内積は， $\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{r}''(t)=-a^2\omega^3\{(-\sin\omega t)(\cos\omega t)+(\cos\omega t)(\sin\omega t)\}=0$． ゆえに速度 $\boldsymbol{r}'(t)$ は位置 $\boldsymbol{r}(t)$ と直交する． （部分点2点）

(3) （配点2点）

運動方程式 $m\boldsymbol{r}''(t)=\boldsymbol{f}(t)$ より，

$$\boldsymbol{f}(t)=(f(t),g(t))=m\boldsymbol{r}''(t)=m(-a\omega^2)(\cos\omega t,\sin\omega t)=-am\omega^2(\cos\omega t,\sin\omega t)$$ （ここまでで正解）

よって， $f(t)=-am\omega^2\cos\omega t$， $g(t)=-am\omega^2\sin\omega t$．