微積分学I 第3回 写像

1．写像

A,B を集合とする．

△ 集合 A の任意の要素に対し B の要素を一つ対応づける規則 f を**写像**(関数)と言う．

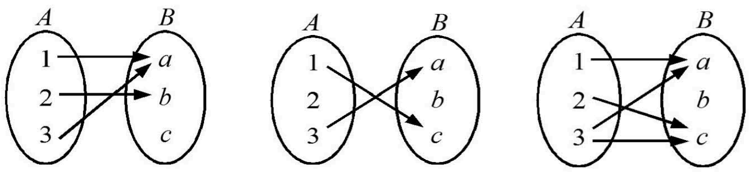
△ f が A から B への写像であることを $f:A\to B$ と表す．

△ A を f の**定義域**と言う．

△ f により $a\in A$ に対応づけられる B の要素を $f(a)$ と書き， f による a の**像**と言う．

△ 像の全体を $f(A)=\{f(a)\,|\,a\in A\}$ と書き， f の**値域**と言う．もちろん， $f(A)\subset B$ である．

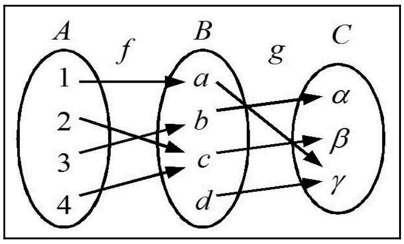
［例1］ $A=\{1,2,3\}$ の要素から $B=\{a,b,c\}$ の要素への対応規則を下図に示す．どれが写像か？写像であれば，その定義域と値域を示せ．



答：左は写像．定義域は A ，値域は $\{a,b\}$ である．

中は写像でない(2の対応先がないから)．右は写像でない(3の対応先が2つだから)．//

2．合成写像



A,B,C を集合とする．

△ 2つの写像 $f:A\to B$ ， $g:B\to C$ の**合成写像** $g\circ f:A\to C$ を

$$g\circ f(x)=g(f(x))\quad (x\in A)$$

で定義する．

［例2］右図の f,g の合成写像 $h=g\circ f$ を定めよ．

答： $h(1)=g(f(1))=g(\square)=\square, h(2)=g(f(2))=g(\square)=\square,$
$h(3)=g(f(3))=g(\square)=\square, h(4)=g(f(4))=g(\square)=\square.//$

3．全射，単射と全単射

写像 $f:A\to B$ を考える．

△ $f(A)=B$ となる写像 f を**全射**と言う． （任意の $y\in B$ に対し $f(x)=y$ となる $x\in A$ が存在する）

△ $a\neq b \Rightarrow f(a)\neq f(b)$ となる写像を**単射**と言う． （異なる要素は異なる要素に対応する）

△ 全射かつ単射である写像を**全単射**と言う．

［例3］大学の数学では写像(関数)は f,A,B を全て指定して決まる．同じ式でも A,B が違えば，厳密には別の関数と見なす．例えば， $f(x)=\cos x$ とすると，

(1) $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$ は全射であるが単射ではない．

$f(\mathbb{R})=[-1,1]$ だから全射． $0,2\pi\in\mathbb{R},0\neq 2\pi$ なのに $f(0)=1=f(2\pi)$ だから単射ではない．

(2) $f:[0,\pi/2]\to[-1,1]$ は単射であるが全射ではない．

授業資料 http://www.st.nanzan-u.ac.jp/info/sugiurah 質問メールなど sugiurah@nanzan-u.ac.jp

$f([0,\pi/2])=[0,1]\neq[-1,1]$ ゆえ全射でない． $x,y\in[0,\pi/2]$ で $x\neq y$ なら $f(x)\neq f(y)$ ゆえ単射．

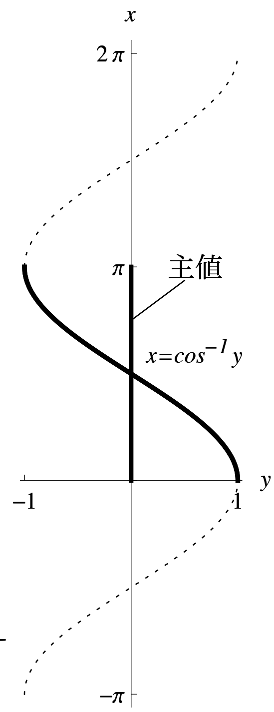
(3) $f:[0,\pi]\to[-1,1]$ は全単射である．

$f([0,\pi])=[-1,1]$ ゆえ全射． $x,y\in[0,\pi]$ で $x\neq y$ なら $f(x)\neq f(y)$ ゆえ単射．

(4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は全射でも単射でもない．

$f(\mathbb{R})=[-1,1]\neq\mathbb{R}$ だから全射でない．(1)と同じ理由で単射でもない．//

4．逆写像(逆関数)



△ 写像 $f:A\to B$ で，任意の $y\in B$ に対して $f(x)=y$ となる $x\in A$ がただ一つ決まるなら，この対応 $y\to x$ を $f^{-1}:B\to A$ と書き， f の**逆写像**という．

☆ 写像 f が逆写像 f^{-1} を持つことと， f が全単射である事は同値である．

☆ $f^{-1}\circ f(x)=x\ \ (x\in A)$ である．また， $f\circ f^{-1}(y)=y\ \ (y\in B)$ である．

△ 写像 $f:A\to A$ が $f(x)=x$ を満たすとき， f を A の上の**恒等関数**という．

☆ $f^{-1}\circ f$ は A の上の恒等関数， $f\circ f^{-1}$ は B の上の恒等関数である．

［例4］例3の(3)より $f:[0,\pi]\to[-1,1], f(x)=\cos x$ は全単射であるから逆関数が存在する．それを $f^{-1}(y)=\cos^{-1}y\ (y\in[-1,1])$ または $f^{-1}(y)=\arccos y$ と書き，**アークコサイン関数**という(右図)．また，区間 $[0,\pi]$ をアークコサイン関数の**主値**という．

アーク(arc)は弧度の意味．アークコサイン y とは，コサインが y になるようなアーク(弧度)のこと．次の値を求めよう．

$$\cos^{-1}1=\boxed{},\cos^{-1}\frac{1}{2}=\boxed{},\cos^{-1}0=\boxed{},\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\boxed{},\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\boxed{}．\ //$$

☆ 連続関数 $f:[a,b]\to[c,d]$ が全射であるとする．このとき，逆関数 $f^{-1}:[c,d]\to[a,b]$ が存在するための必要十分条件は， f が $[a,b]$ で単調（単調増加あるいは単調減少）であることである．//

練習問題

関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ を考える．

(1) 関数 $f(x)$ は $\mathbb{R}$ で単調増加であることを示せ．

(2) 逆関数 $f^{-1}(y)$ を求めよ．

(3) $f^{-1}(f(x))=x$ が成り立つことを確かめよ．

(2), (3) では $X=e^x$ と置くと解答が書き易い．

第3回解答

練習問題

関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ を考える．

(1) 関数 $f(x)$ は $\mathbb{R}$ で単調増加であることを示せ．

(2) 逆関数 $f^{-1}(y)$ を求めよ．

(3) $f^{-1}(f(x))=x$ が成り立つことを確かめよ．

解答

(1) （配点4点）

$f'(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}>0\ (x\in\mathbb{R})$ だから，単調増加．

別解：e^x は単調増加．これより，e^{-x} は単調減少，$-e^{-x}$ は単調増加である．ゆえに，$f(x)$ は単調増加．

(2) （配点3点）

$x=f^{-1}(y)$ とすると，$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=y$．$X=e^x$ と置くと，

$$X-X^{-1}=2y. \quad X^2-2yX-1=0.$$

これを X について解き，$X=y\pm\sqrt{y^2+1}$．$X=e^x>0$ ゆえ $-$ は不可で，$X=y+\sqrt{y^2+1}$．両辺対数を取り，

$$f^{-1}(y)=x=\log\left(y+\sqrt{y^2+1}\right).$$

(3) （配点3点）

$X=e^x$ と置くと，

$$\sqrt{\left(\frac{X-X^{-1}}{2}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{X^2+2X+1}{4}}=\sqrt{\left(\frac{X+X^{-1}}{2}\right)^2}=\frac{X+X^{-1}}{2}.$$

これより，

$$f^{-1}(f(x))=\log\left(f(x)+\sqrt{f(x)^2+1}\right)=\log\left(\frac{X-X^{-1}}{2}+\sqrt{\left(\frac{X-X^{-1}}{2}\right)^2+1}\right)$$

$$=\log\left(\frac{X-X^{-1}}{2}+\frac{X+X^{-1}}{2}\right)=\log X=x.$$