微積分学I 第2回 論理の初歩

1．命題と条件

△ **命題** p ：その真偽がどちらかに定まる文や式．$1=1$ や $2<3$ や $4\in\mathbb{N}$ は命題．

「4以上の偶数は2つの素数の和である」は命題．真か偽か誰も知らないが，どちらかではある．

△ **条件** $p(x)$ ：変数(複数)を含んだ命題．変数の動く範囲 U を**全体集合**という．

$x\geq 1$ は条件．全体集合としては，$\mathbb{N},\mathbb{Z}$ 等が考えられる．

＜論理演算＞ 命題から新しい命題を作る式．意味(定義)はお約束．

△ **否定** $\overline{p}$ ：「p は成り立たない」という命題．

△ **論理和** $p\vee q$ ：p または q，と読む．「p と q のどちらか**は**成り立つ」という命題．**一方が**ではない

△ **論理積** $p\wedge q$ ：p かつ q，と読む．「p と q が両方成り立つ」という命題．

△ **含意** $p\Rightarrow q$ ：p ならば q，と読む．$\overline{p}\vee q$ のこと．

「p が成立するときには($\overline{p}$ が成立しないので)必ず q が成立する．($\overline{p}$ が成立するときには q はどうでもよい．)」という命題．括弧内は意識されないので注意．

修辞法：絶対正しくないことを結論 q にする含意は，自然言語では $\overline{p}$ を強調するために使われる．

「p (お前が勝つ)なら，q (太陽が西から昇る)」は $p\Rightarrow q$ ．

q は正しくないので $\overline{p}$ が正しいと言っている．なぜ，これで強調になるのかな？

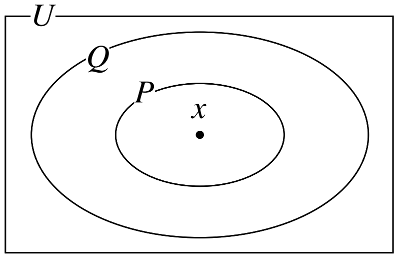
△ $\underset{q\text{の}\textbf{十分条件}}{p} \Rightarrow \underset{p\text{の}\textbf{必要条件}}{q}$ ：q のためには，p で十分．p のために q は必要(q でなければ p でない)．

☆ (ド・モルガンの法則)：① $\overline{p\vee q}=\overline{p}\wedge\overline{q}$ である．また，② $\overline{p\wedge q}=\overline{p}\vee\overline{q}$ である．

① 「車か自転車が使える」の否定は「車も自転車も使えない」

② 「車も自転車も使える」の否定は「車か自転車は使えない」

＜論理の見える化(論理の可視化)＞



△ **真理集合** $P=\left\{x\in U \,\middle|\, p(x)\text{は真}\right\}$ ：$p(x) \Leftrightarrow x\in P$

(P を $p(x)$ の真理集合という．もちろん $P\subset U$ ．)

☆ $p(x)\Rightarrow q(x)$ を証明することと，$P\subset Q$ を証明することは同じ．

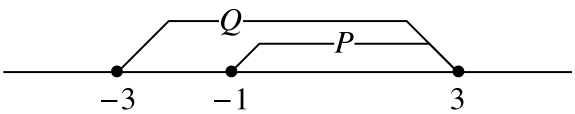
☆ $p(x)\Leftrightarrow q(x)$ を証明することと，$P=Q$ を証明することは同じ．

［例題1］(i) $\underbrace{|x-1|<2}_{p(x)} \Rightarrow \underbrace{|x|<3}_{q(x)}$，(ii) $\underbrace{x^2\leq x}_{p(x)} \Rightarrow \underbrace{x^2\leq 1}_{q(x)}$ を示せ．ただし $x\in\mathbb{R}$ (全体集合)とする．

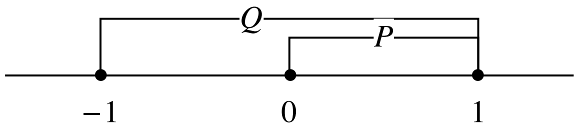
(i) $P=\left\{x \,\middle|\, |x-1|<2\right\}=(-1,3),\ Q=\left\{x \,\middle|\, |x|<3\right\}=(-3,3)$ より，$P\subset Q$ ．よって，$p(x)\Rightarrow q(x)$ ．

(ii) $P=\left\{x \,\middle|\, x^2\leq x\right\}=[0,1],\ Q=\left\{x \,\middle|\, x^2\leq 1\right\}=[-1,1]$ より，$P\subset Q$ ．よって，$p(x)\Rightarrow q(x)$ ．

数直線上に P,Q を表して直感的に理解．



(i) の包含図



(ii)の包含図

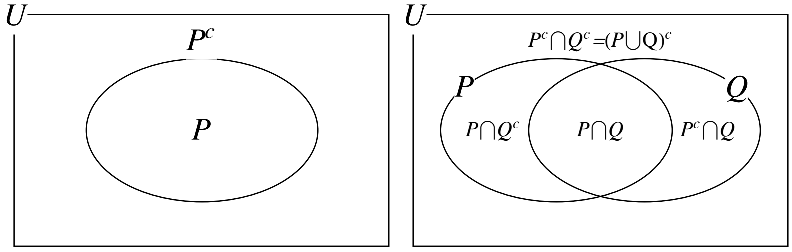
http://www.st.nanzan-u.ac.jp/info/sugiurah 質問メールなど sugiurah@nanzan-u.ac.jp

☆ $P=\left\{x\in U \middle| p(x)\text{は真}\right\}$, $Q=\left\{x\in U \middle| q(x)\text{は真}\right\}$ とするとき,

$P^c=\left\{x\in U \middle| \overline{p(x)}\text{は真}\right\}=\left\{x\in U \middle| p(x)\text{は偽}\right\}$, $P\cup Q=\left\{x\in U \middle| p(x)\vee q(x)\text{は真}\right\}$, $P\cap Q=\left\{x\in U \middle| p(x)\wedge q(x)\text{は真}\right\}$,

$P^c\cup Q=\left\{x\in U \middle| p(x)\Rightarrow q(x)\text{は真}\right\}=(P\cap Q^c)^c=\left\{x\in U \middle| p(x)\wedge\overline{q(x)}\text{は偽}\right\}$.

($(P\cap Q^c)^c=(P\cap Q)\cup(P^c\cap Q)\cup(P^c\cap Q^c)$)



3．全称記号∀，存在記号∃

△ $\forall x\ p(x)$ ：「全ての x について, $p(x)$ が成り立つ」と言う命題. $x\in U\Rightarrow p(x)$ の別表現.

△ $\exists x\ p(x)$ ：「 $p(x)$ が成り立つ x が存在する」や「ある x について $p(x)$ が成り立つ」と言う命題.

☆ $\overline{\forall x\ p}=\exists x\ \overline{p}$ ：「全ての x について, $p(x)$ が成り立つ」の否定は「 $\overline{p(x)}$ が成り立つ x が存在する」

☆ $\overline{\exists x\ p}=\forall x\ \overline{p}$ ：「 $p(x)$ が成り立つ x が存在する」の否定は「全ての x について, $\overline{p(x)}$ が成り立つ」

4．対偶と証明

☆ $p\Rightarrow q$ は $\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$ (対偶)と等しい. $\because\ (p\Rightarrow q)\overset{\Rightarrow\text{の意味}}{\equiv}(\overline{p}\vee q)\overset{\text{否定の否定}}{\equiv}(\overline{p}\vee\overline{\overline{q}})\overset{\text{交換則}}{\equiv}(\overline{\overline{q}}\vee\overline{p})\overset{\Rightarrow\text{の意味}}{\equiv}(\overline{q}\Rightarrow\overline{p})$.

［例題2］対偶を作れ.

(i) $\underbrace{n^2\text{が}3\text{の倍数}}_{p}$ なら $\underbrace{n\text{は}3\text{の倍数}}_{q}\xleftrightarrow{\text{対偶}}\underbrace{n\text{が}3\text{の倍数でない}}_{\overline{q}}$ なら, $\underbrace{n^2\text{は}3\text{の倍数でない}}_{\overline{p}}$

(ii) $\underbrace{a+b>3}_{p}$ ならば, $\underbrace{a>1\text{または}b>2}_{q}\xleftrightarrow{\text{対偶}}\underbrace{a\le 1\text{かつ}b\le 2}_{\overline{q}}$ なら, $\underbrace{a+b\le 3}_{\overline{p}}$

(iii) 「 $\underbrace{\text{任意の}\varepsilon>0\text{について}a<b+\varepsilon}_{p}$ 」なら $\underbrace{a\le b}_{q}\xleftrightarrow{\text{対偶}}\underbrace{a>b}_{\overline{q}}$ なら「 $\underbrace{\text{ある}\varepsilon>0\text{について}a\ge b+\varepsilon}_{\overline{p}}$ 」

第2回 練習問題

a_1,a_2,b_1,b_2 を実数とする. ゼロベクトルではない2つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ について, 次の2つの条件 p,q を考える.

p ： $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ は同一方向である. すなわち, 実数 k が存在して, $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$ が成り立つ.

q ： $a_1b_2-a_2b_1=0$.

このとき, $p\Leftrightarrow q$ を次の手順で示せ.

(1) $p\Rightarrow q$ を示す.

(2) $q\Rightarrow p$ を示す.

ヒント (2) 例えば, $a_1=0$ と $a_1\ne 0$ の二つの場合に分けて考えるとよい.

第2回 練習問題解答

a_1, a_2, b_1, b_2 を実数とする．零ベクトルではない2つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2), \boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ について，次の2つの条件 p,q を考える．

p ： $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ とは同一方向である．すなわち，実数 k が存在して， $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$ が成り立つ．

q ： $a_1b_2-a_2b_1=0$ ．

このとき， $p\Leftrightarrow q$ を次の手順で示せ．

(1) $p\Rightarrow q$ を示す.

(2) $q\Rightarrow p$ を示す.

ヒント (2) 例えば， $a_1=0$ と $a_1\neq 0$ の二つの場合に分けて考えるとよい.

<解答>

(1) p が成り立つとする． $(b_1,b_2)=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}=k(a_1,a_2)$ となる $k\in\mathbb{R}$ が存在する．その k について，

$$b_1=ka_1, b_2=ka_2 .$$

よって，

$$a_1b_2-a_2b_1=a_1(ka_2)-a_2(ka_1)=0 .$$

ゆえに， $p\Rightarrow q$ ． （4点）

(2) q が成り立つとする． $a_1b_2-a_2b_1=0$ である． $a_1\neq 0$ の場合と， $a_1=0$ の場合に分けて考える．

2-1) $a_1\neq 0$ のとき． $k=b_1/a_1$ とすると， $b_1=ka_1$ ．また， $a_1b_2-a_2b_1=0$ より， $b_2=a_2b_1/a_1=ka_2$ ．よって，

$$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)=(ka_1,ka_2)=k\boldsymbol{a} .$$

2-2) $a_1=0$ のとき． $a_1b_2-a_2b_1=-a_2b_1=0$ ．より， $a_2=0$ か $b_1=0$ ．しかるに，条件(零ベクトルでない)

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)=(0,a_2)\neq(0,0)$$

より， $a_2\neq 0$ ．よって， $a_2b_1=0$ より， $b_1=0$ ．ここで， $k=b_2/a_2$ とすると，

$$\boldsymbol{b}=(0,b_2)=\frac{b_2}{a_2}(0,a_2)=k\boldsymbol{a} .$$

ゆえに， $q\Rightarrow p$ ． （4点）

(1), (2) より， $p\Leftrightarrow q$ ． （2点）

多少論理の運びがまずくても○.

結論をきちんと述べる．特に最後の $p\Leftrightarrow q$ ．結論のない証明は1点ずつ減点.

2-2)は添え字1,2を交換して2-1)と同じ論法でもよい．色々に書ける．ヒント通りでなくてもよい.

(2) q が成り立つとする． $a_1b_2-a_2b_1=0$ である．

条件(零ベクトルでない)より， $a_1\neq 0$ か， $a_2\neq 0$ である．この二つに場合を分けて証明する．

2-1) $a_1\neq 0$ のとき． $k=b_1/a_1$ とすると， $b_1=ka_1$ ．また， $a_1b_2-a_2b_1=0$ より， $b_2=a_2b_1/a_1=ka_2$ ．よって，

$$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)=(ka_1,ka_2)=k\boldsymbol{a} .$$

2-2) $a_2\neq 0$ のとき． $k=b_2/a_2$ として，2-1)と同様に $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)=(ka_1,ka_2)=k\boldsymbol{a}$ が示せる．

ゆえに， $q\Rightarrow p$ ．