微積分学I 第1回 集合

１．集合

1-1. 集合とは

△ **集合**：範囲がはっきりしたものの集まり.

・範囲がはっきりした集まり≡「$x \in A$ か $x \notin A$ かのどちらか一方が成り立つ」ことが明らか.

× 「好きな果物の集まり」は集合ではない.

「$x \in A$ と $x \notin A$ の両方が成立」，「$x \in A$ も $x \notin A$ も成立しない」ことがある.

「りんごは好きだが，食べ過ぎると見るのも嫌」「ぼくは好きでも嫌いでもでもない」

○ 有理数(分数で表せる数)全体の集まり $\mathbb{Q}$ は集合.

ある数 x は分数で表される($x \in \mathbb{Q}$)か表せない($x \notin \mathbb{Q}$)かどちらかだから. 個々人がそれを正しく判断できるかどうかとは別. 原理的に「どちらかである」ことが分かればよい.

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ を知らない人がいてもよい.（$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ は前6世紀に証明された.）

$\pi \notin \mathbb{Q}$ を知らない人がいてもよい.（$\pi \notin \mathbb{Q}$ は18世紀に証明された.）

＜数の集合と記号＞

$\mathbb{N}$ ：自然数全体(Natural numbers)，　$\mathbb{Z}$ ：整数全体(ganze Zahlen)，　$\mathbb{Q}$ ：有理数全体(Quotients)，

$\mathbb{R}$ ：実数全体(Real numbers)，　$\mathbb{C}$ ：複素数全体(Complex numbers)

1-2. 集合の表現（数の集合）

△ **外延的記法**：集合 A の要素を列挙する.

まともに書く： $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\varnothing = \{\}$.

一般型を書く： $A = \left\{ \text{関数や一般型} \middle| \text{変数の範囲・性質} \right\}$.

$$E = \left\{ 2n \middle| n \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ 2n \middle| n\text{は整数} \right\}，\quad L = \left\{ (x, 2x) \middle| 0 \le x \le 1 \right\}，\quad C = \left\{ (\cos\theta, \sin\theta) \middle| 0 \le \theta < \pi \right\}.$$

△ **内包的記法**：集合 A の要素の性質を書く： $A = \left\{ \text{変数}(\in \text{集合}) \middle| \text{変数の範囲・性質・方程式} \right\}$

$$B = \{n \in \mathbb{Z} |\ 1 \le n \le 5\},\ I = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| 1 \le x \le 5 \right\},\ \varnothing = \{n \in \mathbb{Z} |\ n \ne n\} = \{x \in \mathbb{R} |\ x \ne x\},$$

$$E = \{n \in \mathbb{Z} |\ n\text{は2で割り切れる}\}，\quad L = \{(x, y) |\ y = 2x\}，\quad C = \left\{ (x, y) \middle| x^2 + y^2 = 1 \right\}.$$

［例題1］ 内包的記法で表された集合を外延的記法で表す.

(i) $A = \left\{ x \middle| x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \right\}$. x の条件は $(x+1)(x-1)(x-2) = 0$ なので， $A = \{-1, 1, 2\}$.

(ii) $A = \left\{ (x, y) \middle| 3x - y + 5 = 0 \right\}$. 媒介変数表示すると， $(x, y) = (t, 3t+5)$ なので， $A = \left\{ (t, 3t+5) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$.

1-3. 集合の関係と演算

△ $A \subset B$ ： $x \in A \Rightarrow x \in B$ ： A の要素は B の要素

△ $A = B$ ： $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ ： $x \in A \Rightarrow x \in B$ かつ $x \in B \Rightarrow x \in A$ ： $A \subset B$ かつ $B \supset A$

○ 要素に帰れ： $A \subset B$ の証明で詰まったら， $x \in A \Rightarrow x \in B$ を証明する.

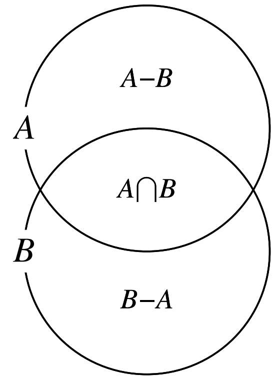
［例題2］ $A = \left\{ n(n+1) \middle| n \in \mathbb{N} \right\}, B = \left\{ 2n \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$ について， $A \subset B$ と $A \ne B$ を示せ.

（$A \subset B$ の証明） $x \in A \Rightarrow x \in B$ を示す.

$x \in A$ なら，ある自然数 n があって， $x = n(n+1)$ ． n が偶数のとき x は偶数． n が奇数なら， $n+1$ が偶数なので x は偶数．よって x は偶数ゆえ， $x \in B$ ．以上より， $A \subset B$ ．//

（ $A \neq B$ の証明）ある $x \in B$ が A からはみ出ていること($x \notin A$)を示す．

$4 \in \mathbb{N}$ について， $4 \in B$ かつ $4 \notin A$ ．よって， $B \not\subset A$ ．ゆえに， $A \neq B$ ．//



△ $A \cup B$ ：和集合， $A \cap B$ ：積集合， $A - B$ ：差集合

２．確率

2-1. 標本空間

△ 標本空間 Ω ：ある試行で起こりうる結果全体の集合．

△ 事象 A ：ある性質を持つ結果の集合(Ω の部分集合)．事象の要素は結果．

［例］サイコロを振るという試行で出る目(結果)：1,2,3,4,5,6．

標本空間 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ ．偶数が出るという事象 $A = \{2,4,6\}$ ．5以上が出るという事象 $B = \{5,6\}$ ．

△ $A \cup B$ ：和事象（ A,B どちらかの性質を持つ結果全体の事象）． $A \cup B = \{2,4,5,6\}$ ．

△ $A \cap B$ ：積事象（ A,B 両方の性質を持つ結果全体の事象）． $A \cap B = \{6\}$ ．

△ $A^c = \Omega - A$ ：余事象（ A の性質を持たない結果全体の事象）． $A^c = \{1,3,5\}$

△ $\{\omega\}, \omega \in \Omega$ ：根本事象(1個の結果 ω からなる事象)． $\{3\}$ など．

2-2. 確率

＜高校の約束＞　Ω は有限集合だとする．全ての根本事象 $\{\omega\}$ の起こる確率は同じだとする．

☆ $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$ ．（ $n(A)$ は A の要素数．）

☆ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ．

☆ $P(A^c) = 1 - P(A)$ ．

△ 条件付確率 $P(A|B)$ ： B が起こったとき， A が起こる確率

☆ $P(A|B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ．また，分母を払って $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ ．

第1回 練習問題

ある町で A, B, C, D 4 紙の新聞の購読状況を調べたところ，次のア，イ，ウ，エ のことが分かった．

ア. A 紙を購読している家庭では B 紙も購読している．

イ. A 紙を購読している家庭では C 紙も購読している．

ウ. B 紙と D 紙の両方を購読している家庭がある．

エ. C 紙と D 紙の両方を購読している家庭はない．

このとき，以下の 1, 2, 3, 4 の事柄が 確実に言えるか どうかを調べよ．

1. A 紙と D 紙の両方を購読している家庭はない．
2. B 紙を購読している家庭では C 紙も購読している．
3. B 紙を購読しているが A 紙は購読していない家庭がある．
4. C 紙を購読しているが A 紙は購読していない家庭がある．

（公務員試験より）

ア～エの状況をベン図で表し，設問に答えよ．

第1回 練習問題解答

ある町で A, B, C, D 4 紙の新聞の購読状況を調べたところ，次のア，イ，ウ，エ のことが分かった．

ア. A 紙を購読している家庭では B 紙も購読している．

イ. A 紙を購読している家庭では C 紙も購読している．

ウ. B 紙とD紙の両方を購読している家庭がある．

エ. C 紙とD 紙の両方を購読している家庭はない．

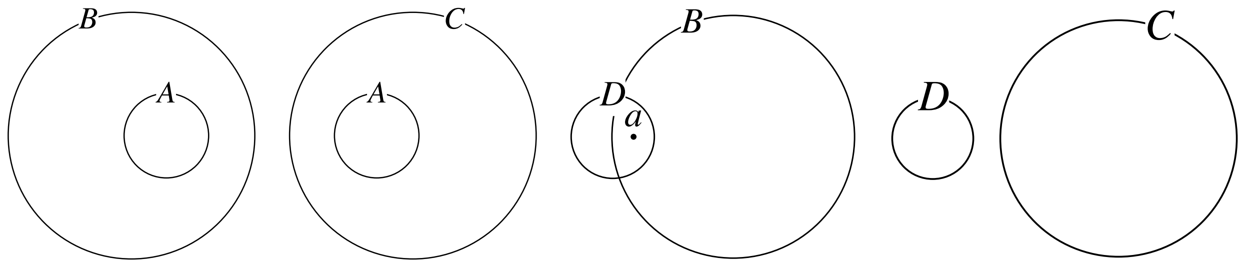
このとき，以下の 1, 2, 3, 4 の事柄が 確実に言えるか どうかを調べよ．

1. A 紙と D 紙の両方を購読している家庭はない．
2. B 紙を購読している家庭では C 紙も購読している．
3. B 紙を購読しているが A 紙は購読していない家庭がある．
4. C 紙を購読しているが A 紙は購読していない家庭がある．

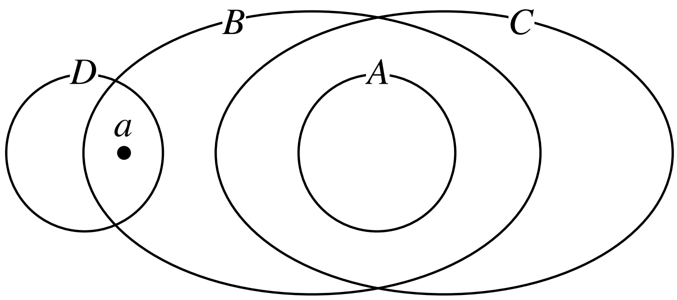
（公務員試験より）

ア〜エの状況をベン図で表し，設問に答えよ．

解答：ア〜エの状況をそれぞれベン図に書く．



合わせたベン図を書くと下図のようになる． a はウの家庭である．



ベン図 (2点)

1. $A \cap D = \emptyset$ だから， 1は確実に言える． (2点)
2. 家庭 a があるので， $B \subset C$ ではない． 2は誤り． (2点)
3. 家庭 a があるので， 3は確実に言える． (2点)
4. $C - A \neq \emptyset$ の場合も $C - A = \emptyset$ の場合も両方あり得る． 4は確実には言えない． (2点)

ベン図が合っていれば2点，解答は下線部の正否だけ見る(ベン図が正しく読めていれば○)．

＜解説＞

ベン図は一般的なものを書く．各集合の境界線で区切られた区画がなるべく多いベン図．

空でない(要素がある)と指定された区画には要素の印に点を描く．

ベン図で，各集合の境界線で区切られた区画は，指定が無ければ $\emptyset$ の可能性がある．

この問題で確実なのは， $B \cap D \neq \emptyset$ だけである．