ロッシュの剰余項

・変数 x の k 次単項式を $x^k\,(k \geq 0)$ と書く．ただし0次単項式は，$x^0 \equiv 1$ と約束する．すなわち，$0^0 = 1$．

・$x = a$ における次テーラー展開

$$p_{n-1}(x,a) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{1}$$

は $f(x)$ の近似多項式である．その剰余項（誤差）を

$$R_n(x,a) = f(x) - p_{n-1}(x,a) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{2}$$

とする．関数 $f(x)$ が $x = a$ の近くで n 回微分可能のとき，

剰余項の様々な表現が知られている．例えば，

・ラグランジュの剰余項：$0 < \theta < 1$ が存在して

$$R_n(x,a) = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n, \tag{3}$$

・コーシーの剰余項：$0 < \theta < 1$ が存在して

$$R_n(x,a) = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}(x-a)^n. \tag{4}$$

ロッシュの剰余項はこれらの一般化である．

［定理］（ロッシュの剰余項）先に述べた条件の下で，自然数 $1 \leq p \leq n$ に対し，$0 < \theta < 1$ が存在して，

$$R_n(x,a) = \frac{f(a+\theta(x-a))(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!}(x-a)^n. \tag{5}$$

$p = 1$ でコーシー，$p = n$ でラグランジュの剰余項を得る．

(pr) 補助関数

$$F(x,y) = R_n(x,y) - \frac{(x-y)^p}{(x-a)^p} R_n(x,a) \tag{6}$$

において，x を定数と考える．$F(x,y)$ の y に関する微分は

$$\frac{d}{dy}F(x,y) = \frac{d}{dy}R_n(x,y) + \frac{p(x-y)^{p-1}}{(x-a)^p} R_n(x,a). \tag{7}$$

$p_{n-1}(x,x) = f(x)$ であるから，式(6)より，

$$F(x,x) = R_n(x,x) - \frac{(x-x)^p}{(x-x)^p} R_n(x,a)$$
$$= f(x) - f(x) - \frac{0^p}{(x-x)^p} R_n(x,a) = 0.$$

また $y = a$ のとき，

$$F(x,a) = R_n(x,a) - \frac{(x-a)^p}{(x-a)^p} R_n(x,a)$$
$$= R_n(x,a) - R_n(x,a) = 0 = F(x,x).$$

よって，ロルの定理より，ある $c = a + \theta(x-a)\,(0 < \theta < 1)$

で，$F'(x,c) = 0$ である．これと式(7)より，

$$0 = R_n'(x,c) + \frac{p(x-c)^{p-1}}{(x-a)^p} R_n(x,a).$$

すなわち，

$$R_n(x,a) = -\frac{(x-a)^p}{p(x-c)^{p-1}} R_n'(x,c). \tag{8}$$

下の補題より

$$R_n'(x,y) = -\frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!}(x-y)^{n-1}$$

を式(8)に代入して，

$$\begin{aligned} R_n(x,a) &= \frac{(x-a)^p}{p(x-c)^{p-1}} \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} \\ &= \frac{f^{(n)}(c)}{p(n-1)!}\left(\frac{x-c}{x-a}\right)^{n-p}(x-a)^n. \end{aligned} \tag{9}$$

さらに，

$$\frac{x-c}{x-a} = \frac{x - \{a+\theta(x-a)\}}{x-a} = 1 - \theta$$

より，式(5)を得る．／／

［補題］x を定数，y を変数と見なして剰余項 $R_n(x,y)$ を y で微分すると，

$$R_n'(x,y) = \frac{d}{dy}R_n(x,y) = -\frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!}(x-y)^{n-1}. \tag{10}$$

（証明）式(2)より

$$
\begin{aligned}
R_n(x,y) &= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k \\
&= R_{n-1}(x) - \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!}(x-y)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

n に関する帰納法を用いる．$n=1$ のとき，

$$
\frac{d}{dy}R_1(x,y) = \frac{d}{dy}\bigl(f(x)-f(y)\bigr) = -f'(y) = -\frac{f^{(1)}(y)}{0!}(x-y)^0
$$

で成立．ある $n>1$ で，

$$
\frac{d}{dy}R_{n-1}(x,y) = -\frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-2)!}(x-y)^{n-2}
$$

だとする．このとき，積の微分則より，

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dy}R_n(x,y) &= \frac{d}{dy}\left(R_{n-1}(x,y) - \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!}(x-y)^{n-1}\right) \\
&= -\frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-2)!}(x-y)^{n-2} \\
&\quad -\left(\frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!}(x-y)^{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-2)!}(x-y)^{n-2}\right) \\
&= -\frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!}(x-y)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

ゆえに，全ての $n \geq 1$ で式(14)が成立する．／／