∞/∞不定形のロピタルの定理

［定理］関数$f(t),g(t)$は$[b,a)$で連続かつ微分可能とする．このとき，

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to a-0} g(x)=\infty, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to a-0}\frac{g'(x)}{f'(x)}=A \tag{2}$$

なら，

$$\lim_{x\to a-0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a-0}\frac{g'(x)}{f'(x)}=A. \tag{3}$$

（証明）$f(x),g(x)$は連続ゆえ，このページ最後の補題2より

$$u(x)=\max\{f(x),g(x)\},\ v(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$

は連続である．また，(1)より

$$\lim_{x\to a-0} u(x)=\infty,\ \lim_{x\to a-0} v(x)=\infty \tag{4}$$

である．ゆえに，(4)より，十分aに近いcを固定し$c\le x<a$で$v(x)>1$が成立するようにできる．

さて，(4)より，十分aに近いxで$\sqrt{v(x)}>u(c)$．このとき$1<u(c)<\sqrt{v(x)}<v(x)<u(x)$ゆえ，$u(c)<\sqrt{v(x)}<u(x)$が成立．$u(x)$は連続ゆえ，中間値の定理により$c,x$の内分点$s$で

$$u(s)=\sqrt{v(x)}$$

となるものがとれる．$x\to a-0$で$v(x)\to\infty$より，$x\to a-0$で$s\to a-0$である．また，

$$0<\frac{f(s)}{f(x)}\le\frac{u(s)}{v(x)}=\frac{1}{\sqrt{v(x)}}\to 0 \quad (x\to a-0)$$

より，$\lim_{x\to a-0} f(s)/f(x)=0$．同じく$\lim_{x\to a-0} g(s)/g(x)=0$ゆえ，

$$\lim_{x\to a-0}\frac{1-g(s)/g(x)}{1-f(s)/f(x)}=\frac{1-0}{1-0}=1 \tag{5}$$

である．

コーシーの平均値の定理より，s,xの内分点tで

$$\frac{g'(t)}{f'(t)}=\frac{g(x)-g(s)}{f(x)-f(s)} \tag{6}$$

となるものがとれる．$x\to a-0$で$s\to a-0$より，$x\to a-0$で$t\to a-0$である．

式(5), (6)と，$x\to a-0$で$t\to a-0$であることにより，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a-0}\frac{g(x)}{f(x)} &\overset{(5)}{=} \lim_{x\to a-0}\frac{g(x)}{f(x)}\cdot\frac{1-g(s)/g(x)}{1-f(s)/f(x)}\\ &=\lim_{x\to a-0}\frac{g(x)-g(s)}{f(x)-f(s)} \overset{(6)}{=} \lim_{t\to a-0}\frac{g'(t)}{f'(t)}=A\end{aligned}$$

である．//

この定理は，次に示すように，教科書巻末付録「1. 極限の見直し」に解説されている$\varepsilon-\delta$論法で，より簡潔に証明できる．

（$\varepsilon-\delta$論法による証明）任意の$0<\varepsilon<1$に対し，aに十分近い$c\in[b,a)$をとり，全ての$x\in(c,a)$に対し

$$\left|\frac{g'(x)}{f'(x)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{7}$$

とする．これは，条件(2)で保証される．このとき，

$$\left|\frac{g'(x)}{f'(x)}\right|<A+1 \quad (c<x<a). \tag{8}$$

さて，条件(1)より，

$$\lim_{x\to a-0}\frac{1-f(c)/f(x)}{1-g(c)/g(x)}=1$$

これより，aに十分近い$d\in(c,a)$をとり，

$$\left|\frac{1-f(c)/f(x)}{1-g(c)/g(x)}-1\right|<\frac{\varepsilon}{2(A+1)} \quad (d<x<a) \tag{9}$$

とできる．さて，任意の$x\in(d,a)$に対し，コーシーの平均値の定理により，

$$\frac{g'(s)}{f'(s)}=\frac{g(x)-g(c)}{f(x)-f(c)},\ c<s<x \tag{10}$$

なるsをとる．式(10), (8), (9) を順に用いて，

$$\begin{aligned}\left|\frac{g(x)}{f(x)}-\frac{g'(s)}{f'(s)}\right| &= \left|\frac{g(x)-g(c)}{f(x)-f(c)}\cdot\frac{1-f(c)/f(x)}{1-g(c)/g(x)}-\frac{g'(s)}{f'(s)}\right|\\ &=\left|\frac{g'(s)}{f'(s)}\left(\frac{1-f(c)/f(x)}{1-g(c)/g(x)}-1\right)\right| \qquad (11)\\ &<(A+1)\cdot\frac{\varepsilon}{2(A+1)}<\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

式(7), (11)より，任意の$x\in(d,a)$で

$$\left|\frac{g(x)}{f(x)}-A\right|\le\left|\frac{g(x)}{f(x)}-\frac{g'(s)}{f'(s)}\right|+\left|\frac{g'(s)}{f'(s)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

ゆえに，$\dfrac{g(x)}{f(x)}\to A$．//

［補題1］$x=a$で$f(x)$が連続なら，$|f(x)|$も連続．

（証明）まず，$0\le\big||f(x)|-|f(a)|\big|$．また，三角不等式より，

$$|f(x)|-|f(a)|\le|f(x)-f(a)|,\ |f(a)|-|f(x)|\le|f(x)-f(a)|$$

ゆえ，$\big||f(x)|-|f(a)|\big|\le|f(x)-f(a)|$．よって，

$$0\le\lim_{x\to a}\big||f(x)|-|f(a)|\big|\le\lim_{x\to a}|f(x)-f(a)|=0.$$

ゆえに，$\lim_{x\to a}\big||f(x)|-|f(a)|\big|=0$となり，$|f(x)|$は連続．//

［補題2］$x=a$で$f(x),g(x)$が連続なら，$\max\{f(x),g(x)\}$と$\min\{f(x),g(x)\}$も連続．

（証明）補題1より，$|f(x)-g(x)|$は連続．ゆえに，

$$\max\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)}{2}+\frac{|f(x)+g(x)|}{2},$$

$$\min\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)}{2}-\frac{|f(x)+g(x)|}{2}$$

は連続関数の加減算なので，連続．//