外延と内包

１．哲学

内包はある記号（言葉）が意義とする、対象に共通な性質のことであり、外延は記号の指す具体対象のことを指す。また、外延と内包は各々、概念の外側か内側かという意味合いを持っている。例えば「芸術」という言葉は、「自己表現」「人間活動」などの属性を内包とするのにたいして、「演劇」「音楽」「絵画」「彫刻」「文学」などの具体例を外延として指す。

集合の記号で書くと，内包は「芸術」を

「芸術」＝「自己表現」∩「人間活動」∩⋯

のように積集合で規定する．「芸術」は右辺の諸概念の内包(特殊化)として表す．外延は「芸術」を

「芸術」＝「音楽」∪「絵画」∪「彫刻」∪「文学」∪⋯

のように和集合で規定する．「芸術」は右辺の諸概念の外延(一般化)として表す．

２．集合の記法

全体集合(考察の対象とする要素の全てからなる集合) U の部分集合 A を指定する方法に，内包的記法と外延的記法がある．

2-1. 内包的記法

内包的記法では，条件 $p(x)$ を満たす $x\in U$ の全体からなる集合 A を

$$A=\{x\in U\,|\,p(x)\},\ A=\{x\,|\,p(x)\}\subset U,\ A=\{p(x)\text{を満たす}U\text{の要素}x\text{の全体}\}$$

などと書く．一般的な要素 $x\in U$ と満たすべき条件 $p(x)$ を明示する．議論をしている U が自明で言うに及ばないときは， U を省略して

$$A=\{x\,|\,p(x)\},\ A=\{\{p(x)\text{を満たす}x\text{の全体}\}$$

と書いてもよい．

［例］ $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x\text{は}2\text{の倍数}\}=\{\text{偶数全体}\}$,

$$A=\{(x,y)\,|\,x+y=1\}=\{x+y=1\text{を満たす点}(x,y)\text{全体}\}=\{\text{直線}x+y=1\text{上の点全体}\}\ .$$

いくつかの条件を合わせて一つの条件を作ることができるので，積集合(内包)の雰囲気である．

☆ 内包的記法の積集合は内包的記法．すなわち，

$$A=\{x\,|\,p(x)\},B=\{x\,|\,q(x)\}\ \Rightarrow\ A\cap B=\{x\,|\,p(x)\wedge q(x)\}\ .$$

2-2. 外延的記法

外延的記法では，部分集合 A の要素を列挙して A を表す．例えば，

$$A=\{1,2,3,4,5\}$$

で， $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,1\le x\le 5\}$ を表す．列挙を「漏れなく例示する」と解釈し，無限集合を表すことができる．例えば，内包的記法で書かれた集合

$$A=\{\text{直線}x+y=1\text{上の点全体}\}$$

を

$$A=\{(t,1-t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$$

表し， A の外延的記法とする．なぜなら， t を $\mathbb{R}$ で動かせば $(t,1-t)$ は A 全体を動くので， $(t,1-t)$ は A の全ての要素を「漏れなく例示している」からである．

［例］ $A=\{(1,0)\text{と}(0,1)\text{を結ぶ線分上の点}\}$ の外延的記法は $A=\{(t,1-t)\,|\,0\le t\le 1\}$.

　A の要素は全て，$0 \le t \le 1$ としたときの点 $(t, 1-t)$ として例示できる．

いくつかの例示を合わせて一つの例示を作れるので，和集合(外延)の雰囲気である．

列挙を例示に読み替えるのはずるい？内包でも条件 $p(x)$ が無限個の条件からなる場合は，解釈に飛躍を必要とする．

$$p(x) = p_1(x) \wedge p_2(x) \wedge \cdots$$

は，右辺を手続きと考え，$p_1(x), p_2(x), \cdots$ と順番にチェックしていったら切りがない．数学では，この条件を手続きと考えず，

$$p(x) = \forall i \in \mathbb{N}\ p_i(x) \quad \text{(全ての自然数 } i \text{ について，} p_i(x) \text{ が成り立つ)}$$

と解釈する．

３．２つの表現の関係

内包的記法 $A = \{x | p(x)\}$ はある要素 $x \in U$ が A に含まれているかどうか調べるときに便利．条件 $p(x)$ が満たされたら $x \in A$，満たされなかったら $x \notin A$ である．積集合，積空間を作るのが簡単．

外延的記法 $A = \{f(t) | t \in B\}$ は A の要素を作るのに便利．$t \in B$ を任意にとって，$f(t)$ は A の要素である．和集合を考えるのが簡単．和空間が簡単にできる．

関数 $f: V \to U$ を考える．部分集合 $B \subset V$ に対して $A = f(B) \subset U$ とする．$f(B)$ の定義より，

$$A = \{f(t) | t \in B\} \tag{1}$$

であり，$\{f(t) | t \in B\}$ は A の外延的記法の例と考えられる．

(1)は $A = f(B)$ の定義であるが，$A = f(B)$ の定義を

$$A = \{x | \exists t \in B\ x = f(t)\}$$

と書くこともある．これは，内包的記法である．$A = f(B)$ を介して，内包と外延は等価である．

特殊な例として，$f: A \to A$ を恒等関数 $f(x) = x$ で定義すると，外延的記法 $A = \{f(x) | x \in A\}$ が得られる．すると，内包的記法 $A = \{x | x \in A\}$ も x を恒等関数と思えば外延的記法となる．

要するに，内包，外延は対立概念ではなく，程度の問題である．また解釈に依存する．要素 x の性質 $p(x)$ が書いてあると解釈したいなら内包性．要素が漏れなくどんどん作れると解釈するときは外延性を意識しているのである．

［例題］ $A = \{(t, 1-t) | 0 \le t \le 1\}$ をより内包性(性質重視)の強い記法に書き直せ．

　答：$A = \{(1,0) \text{と} (0,1) \text{を結ぶ線分上の点}\}$