不定積分ノート

ここで，**積分できる**というのは，不定積分が初等関数で表すことができるという意味で使う．

初等関数とは，指数関数，対数関数，三角関数，逆三角関数，根号，多項式，を組み合わせてできる関数．

有理関数とは，変数と定数の四則演算でできる関数．

［０］基礎公式

１．基本的な関数の積分（憶えるべし，常に微分してチェック）

(1) $\displaystyle\int x^{\alpha}dx=\begin{cases}\log|x| & (\alpha=-1),\\ \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} & (\alpha\neq-1).\end{cases}$ (2) $\displaystyle\int\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}dx=\begin{pmatrix}-\cos x\\ \sin x\end{pmatrix}$

(3) $\displaystyle\int\sec^2 x\,dx=\tan x$ (4) $\displaystyle\int e^x\,dx=e^x$

(5) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x$ (6) $\displaystyle\int\frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x$

２．置換積分公式（憶えるべし）

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\quad(x=\varphi(t)).$$

重要な応用：$\displaystyle\int f(x)dx=F(x)\ \Rightarrow\ \int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)$

$\displaystyle\int\cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)$ などなど

３．部分積分公式（憶えるべし）

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dt.$$

［１］有理関数

基本事項：積分変数 x の有理関数は積分できる．

それゆえ，多くの置換積分法は有理関数の積分に変換することを目標としている．

＜積分の手順＞

１．基本関数の和に分解（部分分数分解）

２．各基本関数を積分

手順１，２に必要な技法をマスターすることが求められる．

＜基本関数の積分＞

１．多項式：基礎公式

２．分母が1次式の n 乗，分子が定数

$$\int\frac{dx}{(x+a)^n}=\begin{cases}\log|x+a| & (n=1),\\ \dfrac{-1}{(n-1)(x+a)^{n-1}} & (n\geq2).\end{cases}$$

３．分母が2次式の n 乗，分子が1次式

$$\int\frac{cx+d}{(x^2+ax+b)^n}dx=\frac{c}{2}\int\frac{(x^2+ax+b)'}{(x^2+ax+b)^n}dx+\int\frac{b-ac/2}{(x^2+ax+b)^n}dx.$$

第1項：

$$\int\frac{(x^2+ax+b)'}{(x^2+ax+b)^n}dx=\begin{cases}\log\left|x^2+ax+b\right| & (n=1),\\ \dfrac{-1}{(n-1)(x^2+ax+b)^{n-1}} & (n\geq2)\end{cases}$$

第2項：平方完成で，

$$\int\frac{1}{(x^2+ax+b)^n}dx=\int\frac{1}{(t^2+c^2)^n}dx\quad\left(t=x+\frac{a}{2},\ c=\sqrt{b-a^2/4}\right).$$

ここで $\displaystyle I_n=\int\frac{1}{(t^2+c^2)^n}dx$ と置くと，

$$I_1=\frac{1}{c}\tan^{-1}\frac{1}{c}x,$$

$$I_2=\frac{1}{2c^2}\left\{\frac{t}{t^2+c^2}+\frac{1}{c}\tan^{-1}\frac{1}{c}x\right\},$$

$$I_n=\frac{1}{2c^2(n-1)}\left\{\frac{t}{(t^2+c^2)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}\right\}\quad(n\geq2).$$

I_1,I_2 は憶えておくと便利．

［２］三角関数

目的は $\sin x,\cos x$ の有理式（$\sin x,\cos x$ を四則演算で組み合わせた関数）の積分．

(a1) $\sin x=t$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leq t\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ で置換積分：$\cos x dx=dt$

$$\int R(\sin x)\cos xdx=\int R(t)dt\quad\left(-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

(a2) $\cos x=t$ $(0\leq x\leq\pi)$ で置換積分：$\sin xdx=-dt$

$$\int R(\cos x)\sin xdx=\int R(t)dt\quad(0\leq t\leq\pi)$$

(b) 加法定理：$\sin x,\cos x$ の積を和に変換

$$\int\sin ax\cos bx\,dx=\frac{1}{2}\int\{\sin(a+b)x+\sin(a-b)x\}\,dx,$$

$$\int\sin ax\sin bx\,dx=\frac{-1}{2}\int\{\cos(a+b)x-\cos(a-b)x\}dx,$$

$$\int\cos ax\cos bxdx=\frac{1}{2}\int\{\cos(a+b)x+\cos(a-b)x\}dx,$$

$$\int\cos^2 xdx=\frac{1}{2}\int\{1+\cos 2x\}dx,\ \int\sin^2 xdx=\frac{1}{2}\int\{1-\cos 2x\}dx,$$

(c) $\tan x=t$ で置換積分：

$$\int R(\sin^2 x,\cos^2 x,\tan x,\cot x)dx=\int R\left(\frac{t^2}{1+t^2},\frac{1}{1+t^2},t,\frac{1}{t}\right)\frac{1}{1+t^2}dt$$

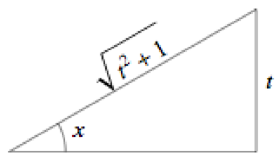
$\sin^2 x,\cos^2 x,\tan x,\cot x$ の有理式に用いる．置き換え規則は

$$dx=\frac{1}{1+t^2}dt,$$

$$\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2},$$

$$\sin x\cos x=\frac{t}{1+t^2},\ \cot t=\frac{1}{t}.$$

これは，右図よりすぐ分かる．



(d) $\tan\dfrac{x}{2}=t$ で置換積分：

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

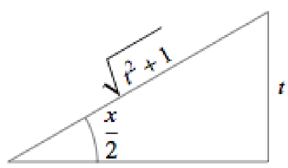
万能！$\sin x,\cos x$ の有理式は全て t の有理式に変換される．置き換え規則は

$$dx=\frac{2}{1+t^2}dt,$$

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

これは，右図よりすぐ分かる．



＜指針＞

(d)は万能である．$\sin x,\cos x$ の有理式は(d)を使えば絶対に積分できる．しかし，変換後の積分が面倒であることが多いのが欠点．

変換後の積分が容易である順に並べると，(a1), (a2), (b), (c), (d)となることが多い．この順に適用が可能かどうか試すと楽に積分できる．

［３］無理関数

根号に囲まれた項を含む関数の不定積分が目標．根号内が1次式と2次式の場合に用いる変数変換がある．3次式以上は一般には積分できない（結果が初等関数でない）．

(a) $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}=t$ で置換積分：

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R\left(\frac{d\,t^n-b}{a-c\,t^n},t\right)\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt$$

1次式／1次式を囲む根号を丸ごと t と置くタイプ．特殊な例として

$$\sqrt[n]{ax+b}=t \qquad (a=0,b=1\text{の場合}),$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{cx+d}}=t \qquad (c=0,d=1\text{の場合})$$

にも適用できる．

<変換規則の導出>具体的な問題でこれができるように練習！

変換式の両辺を n 乗して，

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n.$$

これを，x について解いて，

$$x=\frac{dt^n-b}{a-ct^n}.$$

両辺を微分して，

$$dx=\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt$$

を得る．

(b) $t=x+\sqrt{x^2+ax+b}$ で置換積分：

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2+ax+b}\right)dx=\int R\left(\frac{t^2-b}{2t+a},\frac{t^2+at+b}{2t+a}\right)\frac{2(t^2+at+b)}{(2t+a)^2}dt$$

2次の係数が正の2次式を囲む根号を消す方法．

<変換規則の導出>具体的な問題でこれができるように練習！

変換式の右辺第1項を移行し，辺々二乗

$$t^2-2tx+x^2=x^2+ax+b.$$

これを，x について解いて，

$$x=\frac{t^2-b}{2t+a}. \tag{*}$$

これより，

$$\sqrt{x^2+ax+b}=t-x=t-\frac{t^2-b}{2t+a}=\frac{t^2+at+b}{2t+a}.$$

最後に，(*)を微分して，

$$dx=\frac{2(t^2+at+b)}{(2t+a)^2}dt$$

を得る．

(c) $\int R\left(x,\sqrt{-(x^2+ax+b)}\right)dx$ の積分：$x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta),\ \alpha<\beta$

2次の係数が負で2実根を持つ2次式が根号内にあるタイプ．根号内は0以上だから，$\alpha\le x\le\beta$ であることに注意．これにより，

$$\sqrt{-(x^2+ax+b)}=\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}=(\beta-x)\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}$$

ゆえ，

$$\int R\left(x,\sqrt{-(x^2+ax+b)}\right)dx=\int R\left(x,(\beta-x)\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}\right)dx$$

とすれば，根号内1が1次式／1次式となり，(a)に帰着する．変数変換は，

$$\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}=t.$$

<変換規則の導出>具体的な問題でこれができるように練習！

変換式の両辺を2乗して，

$$\frac{x-\alpha}{\beta-x}=t^2.$$

これを，x について解いて，

$$x=\frac{\alpha t^2+\beta}{t^2+1}.$$

両辺を微分して，

$$dx=\frac{2(\beta-\alpha)t}{(t^2+1)^2}dt.$$

最後に，

$$\sqrt{-x^2-ax-b}=(\beta-x)\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}=\left(\beta-\frac{\beta t^2+\alpha}{t^2+1}\right)t=\frac{(\beta-\alpha)t}{t^2+1}$$

を得る．すなわち，

$$\int R\left(x,\sqrt{-x^2-ax-b}\right)dx=\int R\left(\frac{\beta t^2+\alpha}{t^2+1},\frac{(\beta-\alpha)t}{t^2+1}\right)\frac{2(\beta-\alpha)t}{(t^2+1)^2}dt$$

である．

(d) $\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx=\int R\left(a\tan t,\dfrac{a}{\cos t}\right)\dfrac{a}{\cos^2 t}dt$ ：

変換 $x=a\tan t\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ により，

$$\sqrt{x^2+a^2}=\frac{a}{\cos t},\ dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt.$$

これで，［2］に帰着する．

(e) $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx=\int R\left(a\sec t,a\tan t\right)\dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$ ：

変換 $x=a\sec t\left(0\le t\le\pi,t\ne\dfrac{\pi}{2}\right)$ により，

$$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t,\ dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt.$$

これで，［2］に帰着する．

(f) $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=\int R\left(a\sin t,a\cos t\right)a\cos t\,dt$ ：

変換 $x=a\sin t\left(-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ により，

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t,\ dx=a\cos t\,dt.$$

これで，［2］に帰着する．

<指針>

1. 積分される関数に $\sqrt{ax^2+bx+c}$ が現れたとき，2次の係数が正なら

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\sqrt{x^2+(b/a)x+(c/a)}$$

として(b)を使う．,負なら

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{-a}\sqrt{-\{x^2+(b/a)x+(c/a)\}}$$

として(c)を使う．

2. 三角関数で置き換えるタイプ(d), (e), (f) は簡単であるし，置き換えた後，三角関数の積分法(a1), (a2), (b)くらいで解ければ楽．しかし，三角関数の積分法(c), (d)を使わざるを得ないときは，苦しい．どうせ有理関数の積分に変換するのだから，無理関数の(b), (c)でやり直した方がよいこともある．