指数関数の微分と e その3’

次の事実は既知とする．

☆ 区分求積法.

自然対数の底 e を定義し， e^x の微分公式を示す.

★1 $L=\int_0^1 2^t\,dt=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n(2^{1/n}-1)}$．//

（証明）関数 $f(x)=2^x$ は連続関数ゆえ，積分可能である．区分求積法により，

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}2^{i/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{2-1}{2^{1/n}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(2^{1/n}-1)}.\ //$$

★2 $\lim_{h\to 0}\dfrac{2^h-1}{h}=\dfrac{1}{L}$．//

（証明）正数 $x>0$ の整数部を $[x]$ と書く． $x\to\infty$ で， $x/[x], x/[x+1]\to 1$．これと★1より，

$$\frac{x}{[x+1]}\left([x+1](2^{1/[x+1]}-1)\right)=x(2^{1/[x+1]}-1)\le x(2^{1/x}-1)\le x(2^{1/[x]}-1)=\frac{x}{[x]}\left([x](2^{1/[x]}-1)\right)$$

の最左辺，最右辺は $x\to\infty$ で $1/L$ に収束する．ゆえに， $\lim_{x\to\infty}x(2^{1/x}-1)=1/L$．これより直ちに，

$\lim_{h\to+0}(2^h-1)/h=1/L$．また，

$$\lim_{h\to-0}\frac{2^h-1}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{2^{-h}-1}{-h}=\lim_{h\to+0}2^{-h}\frac{2^h-1}{h}=\frac{1}{L}.\ //$$

☆3 $e=2^L$ とすると， $\lim_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$．//

（証明） $\lim_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{2^{h\log_2 e}-1}{h}=(\log_2 e)\lim_{h\to 0}\dfrac{2^{h\log_2 e}-1}{h\log_2 e}=(\log_2 e)\dfrac{1}{L}=1$．//

☆4 $\left(e^x\right)'=e^x$．//

（証明） $\left(e^x\right)'=\lim_{h\to 0}\dfrac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=e^x$．//