Chapter 2 演習問題詳解

§9

9.1 (1) $S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+6}+\cdots+\frac{1}{n+3n}\right)$ を定積分で求める．

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+3\left(\frac{1}{n}\right)}+\frac{1}{1+3\left(\frac{2}{n}\right)}+\cdots+\frac{1}{1+3\left(\frac{n}{n}\right)}\right)$$

となるので， $f(x)=\frac{1}{1+3x}$ とすると，

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{1+3x}dx=\frac{1}{3}\left[\log(1+3x)\right]_0^1=\frac{\log 4}{3}.$$

コツ：級数から，強制的に $\frac{1}{n}$ をくくりだし，残りが $f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)$ と解釈できるように， $f(x)$ を決める．次の問題で試して見よ．

(2) $S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)$ を定積分で求める．

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n}}}\right)$$

となるので， $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ とすると，

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx=2\left[\sqrt{1+x}\right]_0^1=2\sqrt{2}-2.$$

9.2 (1) $\int_1^2\frac{(1+\sqrt{x})^2}{x\sqrt{x}}dx=\int_1^2\frac{1+2\sqrt{x}+x}{x\sqrt{x}}dx=\int_1^2\left(x^{-3/2}+2x^{-1}+x^{-1/2}\right)dx=\left[-2x^{-1/2}+2\log x+2x^{1/2}\right]_1^2$

$$=\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}+2\log 2+2\sqrt{2}\right)-(-2+0+2)=\sqrt{2}+\log 4.$$

(2) $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\sin 2x\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\pi/6}^{\pi/3}=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}.$

(3) $\int_1^2 e^{3x-2}\,dx=\left[\frac{1}{3}e^{3x-2}\right]_1^2=\frac{1}{3}\left(e^4-e\right).$

(4) $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^2 x\,dx=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right]_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{\pi-2}{8}.$

9.3 (1) $\displaystyle\int\frac{x-1}{x^2-2x+3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2-2x+3\right)'}{x^2-2x+3}dx=\frac{1}{2}\log\left|x^2-2x+3\right|.$

(2) $\displaystyle\int\tan x\,dx=-\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=-\log|\cos x|.$

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{x\log x}dx=\int\frac{(\log x)'}{\log x}dx=\log|\log x|.$

§１０

10.1 (1) $u=1+x^3$ と置く． $du=3x^2dx$ ゆえ， $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx=\frac{1}{3}\int\sqrt{u}\,du=\frac{1}{3}\frac{2}{3}u^{3/2}=\frac{2}{9}(1+x^3)^{3/2}.$

(2) $u=\sin x$ と置く． $du=\cos x\,dx$ ゆえ， $\displaystyle\int\sin^3 x\cos x\,dx=\int u^3\,du=\frac{1}{4}u^4=\frac{1}{4}\sin^4 x.$

(3) $u=x^2$ と置く． $du=2x\,dx$ ゆえ， $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int e^{-u}\,du=-\frac{1}{2}e^{u}=-\frac{1}{2}e^{-x^2}.$

(4) $u=x^2+1$ と置く． $du=2x\,dx$ ゆえ， $\displaystyle\int x\sin(x^2+1)dx=\frac{1}{2}\int\sin u\,du=-\frac{1}{2}\cos u=-\frac{1}{2}\cos(x^2+1).$

(5) $u=\log x$ と置く． $du=\dfrac{1}{x}dx$ ゆえ， $\displaystyle\int\frac{1}{x}(\log x)^2\,dx=\int u^2\,du=\frac{1}{3}u^3=\frac{1}{3}(\log x)^3.$

(6) $u=e^x$ と置く． $du=e^x dx$ ゆえ， $\displaystyle\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\int\frac{1}{1+u^2}du=\tan^{-1}u=\tan^{-1}e^x.$

(7) $u=x^2$ と置く． $du=2xdx$ ゆえ， $\displaystyle S=\int\frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du.$

さらに $\sqrt{1+u^2}=t-u$ と置くと， $1+u^2=(t-u)^2$ を u について解いて， $u=\dfrac{t^2-1}{2t}$． これより，

$$du=\frac{t^2+1}{2t^2}dt,\sqrt{1+u^2}=t-u=\frac{t^2+1}{2t}$$

ゆえ， $\displaystyle S=\int\frac{1}{\left(\dfrac{t^2+1}{2t}\right)}\frac{t^2+1}{2t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt=\log|t|=\log\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|=\log\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right).$

(8) $u=\sqrt{e^x-1}$ と置く． $e^x=1+u^2$ ゆえ， $e^x dx=2udu$． よって， $dx=\dfrac{2udu}{e^x}=\dfrac{2udu}{1+u^2}$． すなわち，

$$\int\sqrt{e^x-1}\,dx=\int u\frac{2udu}{1+u^2}=2\int\frac{u^2du}{1+u^2}=2\int\left(1-\frac{1}{1+u^2}\right)du=2(u-\tan^{-1}u)=2\left(\sqrt{e^x-1}-\tan^{-1}\sqrt{e^x-1}\right).$$

(9) $u=x^3$ と置く． $du=3x^2dx$ ゆえ， $\displaystyle S=\int\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du$． これと，小問(7)より，

$$S=\log\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|=\log\left(x^3+\sqrt{1+x^6}\right).$$

(10) $x=\tan t\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と置く．主値 $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$ の設定を必ず行う．

$dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}, 1+x^2=1+\tan^2 t=\dfrac{1}{\cos^2 t}$ ゆえ，

$$\int\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\int\frac{1}{\left(\dfrac{1}{\cos^2 t}\right)^{3/2}}\frac{dt}{\cos^2 t}=\int\cos t\,dt=\sin t=\sin\left(\tan^{-1}x\right).$$

また，$-\pi/2<t<\pi/2$ より $\cos t>0$．よって，$1+x^2=\dfrac{1}{\cos^2 t}$ より，$\cos t=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$．ゆえに，

$$\int\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\sin t=\cos t\tan t=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

とも書ける．

10.2 (1) $\int x\cdot\sin x\,dx=x\cdot(-\cos x)-\int-\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x$ より，

$$\int x^2\cdot\cos x\,dx=x^2\cdot\sin x-\int 2x\cdot\sin x\,dx=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x=(x^2-2)\sin x+2x\cos x.$$

(2) $\int x\cdot\log x dx=\dfrac{1}{2}x^2\cdot\log x-\int\dfrac{1}{2}x^2\cdot\dfrac{1}{x}dx=\dfrac{1}{2}x^2\cdot\log x-\dfrac{1}{4}x^2$ より，

$$\int x\cdot(\log x)^2\,dx=\frac{1}{2}x^2\cdot(\log x)^2-\int\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{2\log x}{x}dx=\frac{1}{2}x^2\cdot(\log x)^2-\int x\log x\,dx=\frac{x^2}{4}\left(2(\log x)^2-2\log x+1\right).$$

(3) $\int\dfrac{2x^3}{1+x^2}dx=\int\left(2x-\dfrac{2x}{1+x^2}\right)dx=x^2-\log(1+x^2)$ より，

$$\int 6x^2\cdot\tan^{-1}x\,dx=2x^3\cdot\tan^{-1}x-\int 2x^3\cdot\frac{1}{1+x^2}dx=2x^3\cdot\tan^{-1}x-x^2+\log(1+x^2).$$

(4) $\int e^x\cdot\dfrac{1}{x}dx=e^x\cdot\log x-\int e^x\cdot\log x\,dx$ の右辺第2項を移項して，$\int e^x\left(\dfrac{1}{x}+\log x\right)dx=e^x\cdot\log x.$

§１１

11.1 (1) $\dfrac{x+1}{x^2+x-6}=\dfrac{x+1}{(x+3)(x-2)}$ を部分分数分解する．

・$\dfrac{x+1}{(x+3)(x-2)}=\dfrac{a}{x+3}+\dfrac{b}{x-2}$ の分母を払い，$a(x-2)+b(x+3)=x+1\cdots$(a).

・(a)に $x=-3$ を代入して，$-5a=-2.\ \therefore a=2/5$．$x=2$ を代入して，$5b=3.\ \therefore b=3/5$．

以上より，

$$\int\frac{(x+1)dx}{x^2+x-6}=\int\left(\frac{2/5}{x+3}+\frac{3/5}{x-2}\right)dx=\frac{2}{5}\log|x+3|+\frac{3}{5}\log|x-2|=\frac{1}{5}\log\left|(x+3)^2(x-2)^3\right|.$$

(2) 多項式部を分離して，

$$\frac{x^3}{x^2-3x+2}=\frac{(x+3)(x^2-3x+2)+7x-6}{x^2-3x+2}=x+3+\frac{7x-6}{x^2-3x+2}.$$

次に，$\dfrac{7x-6}{x^2-3x+2}=\dfrac{7x-6}{(x-1)(x-2)}$ を部分分数分解する．

・$\dfrac{7x-6}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}$ の分母を払い，$a(x-2)+b(x-1)=7x-6\cdots$(a).

・(a)に $x=1$ を代入して，$-a=1.\ \therefore a=-1$．$x=2$ を代入して，$b=8$．

以上より，

$$\int\frac{x^3dx}{x^2-3x+2}=\int\left(x+3-\frac{1}{x-1}+\frac{8}{x-2}\right)dx=\frac{1}{2}x^2+3x-\log|x-1|+8\log|x-2|=\frac{1}{2}x^2+3x+\log\frac{(x-2)^8}{|x-1|}.$$

(3) 部分分数分解：$\dfrac{x-2}{(x-3)(x-4)^3}=\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b}{x-4}+\dfrac{c}{(x-4)^2}+\dfrac{d}{(x-4)^3}$ の分母を払い，

$$(x-4)^3a+(x-3)(x-4)^2b+(x-3)(x-4)c+(x-3)d=x-2\cdots\text{(a)}.$$

・(a)に $x=3$ を代入して，$-a=1.\ \therefore a=-1$．$x=4$ を代入して，$d=2$．

・$a=-1, d=2$ を(a)に代入して，

$$(x-3)(x-4)^2b+(x-3)(x-4)c=(x-4)^3-(x-4)=(x-4)(x^2-8x+15)=(x-4)(x-3)(x-5).$$

$$\therefore (x-4)b+c=x-5\cdots\text{(b)}$$

・(b)に $x=4$ を代入して，$c=-1$．これを(b)に代入して，$b=1$ を得る．

以上より，

$$\int\frac{x-2}{(x-3)(x-4)^3}dx=\int\left(\frac{-1}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{-1}{(x-4)^2}+\frac{2}{(x-4)^3}\right)dx$$
$$=\log\left|\frac{x-4}{x-3}\right|+\frac{1}{x-4}-\frac{1}{(x-4)^2}=\log\left|\frac{x-4}{x-3}\right|+\frac{x-5}{(x-4)^2}.$$

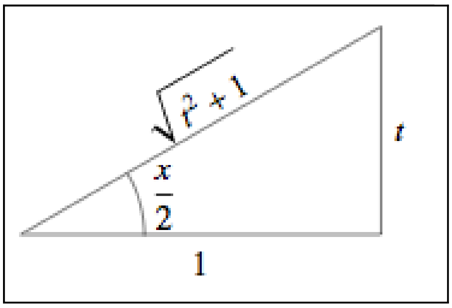
11.3 (1)～(4)は(d) $\tan\dfrac{x}{2}=t$ で置換積分．この置換は万能！

$\sin x, \cos x$ の有理式は全て t の有理式に変換される．

置き換え規則は

$$dx=\frac{2}{1+t^2}dt, \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

これは，右図よりすぐ分かる．導出法を憶えなさい．



(1) $$\int\frac{1}{4+5\sin x}dx=\int\frac{1}{4+5\dfrac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{1}{2t^2+5t+2}dt=\int\frac{1}{(t+2)(2t+1)}dt$$
$$=\int\left(\frac{2/3}{2t+1}-\frac{1/3}{t+2}\right)dt=\frac{1}{3}\log|2t+1|-\frac{1}{3}\log|t+2|=\frac{1}{3}\log\left|\frac{2t+1}{t+2}\right|.$$

これに，$t=\tan\dfrac{x}{2}$ を代入して，$\displaystyle\int\frac{1}{4+5\sin x}dx=\frac{1}{3}\log\left|\frac{1+2\tan(x/2)}{2+\tan(x/2)}\right|$.

注：これは，教科書の答に $-\frac{1}{3}\log 2$ を加えたものになっている．積分定数の違いゆえ問題ない．

(2) $S=\int\frac{1}{5+4\sin x}dx=\int\frac{1}{5+4\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{2}{5t^2+8t+5}dt$．分母が実係数の範囲で1次因子の積に因数分解できない．このときは，分母を平方完成する．

$$S=\frac{2}{5}\int\frac{1}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2}dt=\frac{2}{5}\frac{1}{3/5}\tan^{-1}\left(\frac{t+4/5}{3/5}\right)=\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{5t+4}{3}=\frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{5\tan(x/2)+4}{3}\right).$$

(3) $S=\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx=\int\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{1+2t+t^2}{2t}dt=\int\left(\frac{1}{2t}+1+\frac{t}{2}\right)dt$

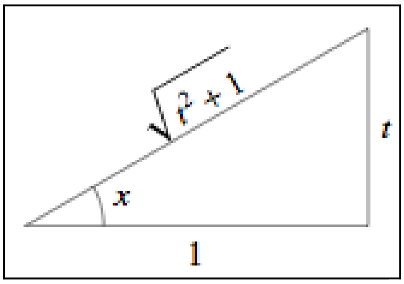
$$=\frac{1}{2}\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}.$$

(4) $S=\int\frac{1}{\sin x}dx=\int\frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)}\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt=\log|t|=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|.$

(5) $\tan x=t$ で置換積分：$\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x\cos x, \tan x, \cot x$ の有理式に用いる．置き換え規則は

$$dx=\frac{1}{1+t^2}dt, \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}, \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}, \sin x\cos x=\frac{t}{1+t^2}, \tan x=t, \cot x=\frac{1}{t}.$$

これは，右図よりすぐ分かる．さて，



$$S=\int\frac{\sin^2 x}{4+\cos^2 x}dx=\int\frac{\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)}{4+\left(\frac{1}{1+t^2}\right)}\frac{1}{1+t^2}dt=\int\frac{t^2}{(4t^2+5)(t^2+1)}dt$$

の右辺を部分分数分解（$T=t^2$ の有理式と考えると速い）．

$$S=\int\left(\frac{5}{4t^2+5}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\frac{5}{4}\int\frac{1}{t^2+(\sqrt{5}/2)^2}dt-\int\frac{1}{t^2+1}dt$$

$$=\frac{5}{4}\frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{2t}{\sqrt{5}}-\tan^{-1}t=\frac{\sqrt{5}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\tan x\right)-x.$$

(6) $\tan x=t$ と置くと，

$$S=\int\tan^3 x\,dx=S=\int t^3\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int\left(t-\frac{t}{1+t^2}\right)dt=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}\log(1+t^2)$$

$$=\frac{1}{2}\tan^2 x-\frac{1}{2}\log(1+\tan^2 x)=\frac{1}{2}\tan^2 x+\frac{1}{2}\log\cos^2 x=\frac{1}{2}\tan^2 x+\log|\cos x|.$$

注：教科書の解との差は，$\frac{1}{2}\tan^2 x-\frac{1}{2\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x-1}{2\cos^2 x}=-\frac{1}{2}$．積分定数の違いゆえ問題ない．

(7) $\sqrt{1-x}=t$ と置く． $1-x=t^2$ より， $x=1-t^2, dx=-2tdt$ ゆえ，

$$S=\int\frac{1}{x\sqrt{1-x}}dx=\int\frac{1}{(1-t^2)t}(-2t)\,dt=\int\frac{2}{t^2-1}dt\,.$$

部分分数分解により，

$$S=\int\frac{2}{(t-1)(t+1)}dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|=\log\left|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right|.$$

(8) $\sqrt[4]{x}=t$ と置く． $x=t^4, dx=4t^3dt$ より，

$$S=\int\frac{3\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx=\int\frac{3t}{1+t^2}4t^3\,dt=12\int\frac{t^4}{t^2+1}dt=12\int\frac{(t^2-1)(t^2+1)+1}{t^2+1}dt$$

$$=12\int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt=4t^3-12t+12\tan^{-1}t=4\left(x^{3/4}-3x^{1/4}+3\tan^{-1}x^{1/4}\right).$$

(9) $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=t$ と置く． $\dfrac{1-x}{1+x}=t^2$ より， $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}dt$． ゆえに，

$$S=\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\int t\frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt=\int\frac{-4t^2}{(1+t^2)^2}dt.$$

部分分数分解と，p.74例題11.1より，

$$S=4\int\frac{1}{(1+t^2)^2}dt-4\int\frac{1}{1+t^2}dt=2\left(\frac{t}{t^2+1}+\tan^{-1}t\right)-4\tan^{-1}t=\frac{2t}{t^2+1}-2\tan^{-1}t.$$

ここで，

$$\frac{2t}{t^2+1}=\frac{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}{\dfrac{1-x}{1+x}+1}=(1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\sqrt{1-x^2}\ .$$

また， $\theta=\tan^{-1}t$ と置くと，

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}=x.\ \therefore 2\tan^{-1}t=\cos^{-1}x.$$

以上より， $S=\sqrt{1-x^2}-\cos^{-1}x.$

注： $\cos^{-1}x=T$ と置くと， $\sin(\pi/2-T)=\cos T=x$ より， $\pi/2-T=\sin^{-1}x$． ゆえに，

$T=\pi/2-\sin^{-1}x$． したがって，(9)の解は， $S=\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x-\dfrac{\pi}{2}$ とも書ける．これは，教科書の解と積分定数が異なるのみである．

(10) $\sqrt{x^2-x+1}=t-x\quad\left(t=x+\sqrt{x^2-x+1}\right)$ と置く． $x^2-x+1=t^2-2tx+x^2$ より，

$$x=\frac{t^2-1}{2t-1}, dx=\frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}dt, \sqrt{x^2-x+1}=t-x=t-\frac{t^2-1}{2t-1}=\frac{t^2-t+1}{2t-1}\,.$$

$$\therefore S=\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx=\int\frac{1}{\left(\dfrac{t^2-1}{2t-1}\right)\left(\dfrac{t^2-t+1}{2t-1}\right)}\frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}dt=\int\frac{2}{t^2-1}dt.$$

これを部分分数分解して，

$$S=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dx=\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|=\log\left|\frac{x-1+\sqrt{x^2-x+1}}{x+1+\sqrt{x^2-x+1}}\right|.$$

(11) $x=\sin t\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ と置く．主値 $-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}$ の設定を必ず行う．

$dx=\cos t dt, \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=\cos t\quad (-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}$ で $\cos t\ge 0$ ゆえ．）より，

$$S=\int\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx=\int\frac{1}{\cos^3 t}\cos t dt=\int\frac{1}{\cos^2 t}dt=\tan t=\tan(\sin^{-1}x).$$

または，$S=\tan t=\dfrac{\sin t}{\cos t}=\dfrac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

(12) $x^{-2}=t\quad (x>0)$ と置く．$x=t^{-1/2}$ ゆえ $dx=\dfrac{-t^{-3/2}}{2}dt$.

$$S=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-4x^2}}=\int\frac{t}{\sqrt{1-4t^{-1}}}\frac{-t^{-3/2}}{2}dt=\int\frac{-1}{2\sqrt{t-4}}dt=-\sqrt{t-4}=-\sqrt{x^{-2}-4}=\frac{-\sqrt{1-4x^2}}{x}.$$

(13) $\log(1+x)=t$ と置く．$x=e^t-1, dx=e^t dt$ より，

$$S=\int\frac{\log(1+x)}{2\sqrt{1+x}}dx=\int\frac{t}{2\sqrt{e^t}}e^t dt=\int t\left(\frac{1}{2}e^{t/2}\right)dt=t\left(e^{t/2}\right)-\int e^{t/2}dt$$
$$=te^{t/2}-2e^{t/2}=(t-2)e^{t/2}=(\log(1+x)-2)\sqrt{1+x}.$$

§１２

12.1 (1) $\dfrac{dx}{dt}=2t, \dfrac{dy}{dt}=3t^2$ より，

$$l=\int_0^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^2\sqrt{4t^2+9t^4}\,dt=\int_0^2 t\sqrt{4+9t^2}\,dt.$$

$u=4+9t^2$ と置くと，$du=18tdt, tdt=\dfrac{du}{18}, \begin{array}{c|ccc} t & 0 & \to & 2 \\ u & 4 & \to & 40\end{array}$ より，

$$l=\int_4^{40}\sqrt{u}\frac{du}{18}=\frac{1}{18}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_4^{40}=\frac{1}{27}(40\sqrt{40}-4\sqrt{4})=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

(2) 双曲線関数の公式 $(\cosh x)'=\sinh x, (\sinh x)'=\cosh x, 1+\sinh^2 x=\cosh^2 x, \sinh 0=0$ を使う．三角関数の公式とそっくり！

$\dfrac{dy}{dx}=\left(a\cosh\dfrac{x}{a}\right)'=\sinh\dfrac{x}{a}$ より，

$$l=\int_0^p \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^p \sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}\,dx=\int_0^p \cosh\frac{x}{a}\,dx=\left[a\sinh\frac{x}{a}\right]_0^p=a\sinh\frac{p}{a}-a\sinh 0=a\sinh\frac{p}{a}.$$

(3) y を独立変数と考える． $x=\frac{1}{4}y^2$, $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}y$ と曲線の長さの公式より，長さ L は

$$L=\int_0^{2a}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy=\int_0^{2a}\sqrt{1+\frac{1}{4}y^2}\,dy\cdots①.$$

$\sqrt{1+\frac{1}{4}y^2}=t-\frac{1}{2}y\cdots②$ と置く．②の両辺を二乗して $1+\frac{1}{4}y^2=t^2-ty+\frac{1}{4}y^2$. $\therefore 1=t^2-ty$. これを y について解いて， $y=t-t^{-1}\cdots③$. 両辺微分して， $dy=(1+t^{-2})dt\cdots④$. ②と③より，

$$\sqrt{1+\frac{1}{4}y^2}=t-\frac{1}{2}(t-t^{-1})=\frac{1}{2}(t+t^{-1})\cdots⑤.$$

④と⑤を①に代入して，置換積間積分を行う．②より $t=\frac{1}{2}y+\sqrt{1+\frac{1}{4}y^2}$ ゆえ，変数変換表は

y	$0\ \to\ 2a$
t	$1\ \to\ a+\sqrt{a^2+1}$

ゆえに，

$$L=\int_1^{a+\sqrt{a^2+1}}\frac{1}{2}(t+t^{-1})(1+t^{-2})dt=\frac{1}{2}\int_1^{a+\sqrt{a^2+1}}(t+2t^{-1}+t^{-3})dt$$

$$=\left[\frac{1}{4}\left(t^2-t^{-2}\right)+\log|t|\right]_1^{a+\sqrt{a^2+1}}=\frac{1}{4}\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)^2-\frac{1}{4}\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)^{-2}+\log\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$$

$$=a\sqrt{a^2+1}+\log\left(a+\sqrt{a^2+1}\right).$$

ここで， $\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)^{-1}=\sqrt{a^2+1}-a$, $\left(\sqrt{a^2+1}\pm a\right)^2=2a^2+1\pm 2a\sqrt{a^2+1}$ を用いた．

（別解1）①を $\frac{1}{2}y=\tan t$ $\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$ で置換積分する．

変数変換表

y	$0\ \to\ 2a$
t	$0\ \to\ \tan^{-1}a$

と $dy=\frac{2}{\cos^2 t}dt$, $\sqrt{1+\frac{1}{4}y^2}=\sqrt{1+\tan^2 t}=\frac{1}{\cos t}$ より，

$$L=\int_0^{\tan^{-1}a}\frac{1}{\cos t}\frac{2dt}{\cos^2 t}=2\int_0^{\tan^{-1}a}\frac{\cos t\,dt}{\cos^4 t}=2\int_0^{\tan^{-1}a}\frac{\cos t\,dt}{(1-\sin^2 t)^2}.$$

さらに， $u=\sin t$ とすると，変数変換表

t	$0\ \to\ \tan^{-1}a$
u	$0\ \to\ a/\sqrt{a^2+1}$

と $du=\cos t\,dt$ より，

$$L=2\int_0^{a/\sqrt{a^2+1}}\frac{du}{(1-u^2)^2}=\frac{1}{2}\int_0^{a/\sqrt{a^2+1}}\left(\frac{1}{(u-1)^2}-\frac{1}{u-1}+\frac{1}{(u+1)^2}+\frac{1}{u+1}\right)du$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log\frac{1+u}{1-u}-\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right]_0^{a/\sqrt{a^2+1}}=\frac{1}{2}\left[\log\frac{1+u}{1-u}+\frac{2u}{1-u^2}\right]_0^{a/\sqrt{a^2+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{a^2+1}+a}{\sqrt{a^2+1}-a}+a\sqrt{a^2+1}=\log(\sqrt{a^2+1}+a)+a\sqrt{a^2+1}.$$

（別解2）①を $\frac{1}{2}y=\sinh t$ で置換積分する．

$$dy=2\cosh t\,dt,\ \sqrt{1+\frac{1}{4}y^2}=\sqrt{1+\sinh^2 t}=\sqrt{\cosh^2 t}=\cosh t$$

と変数変換表

y	0	$\to$	$2a$
u	0	$\to$	$\sinh^{-1}a$

より，

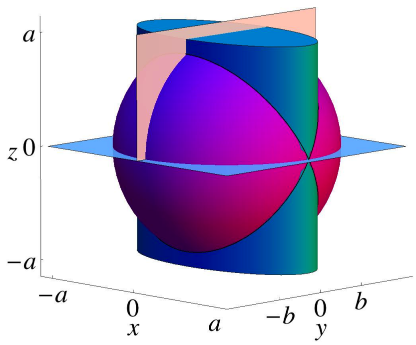
$$L=\int_0^{\sinh^{-1}a}2\cosh t\,\cosh t\,dt=\int_0^{\sinh^{-1}a}2\cosh^2 t\,dt=\int_0^{\sinh^{-1}a}(1+\cosh 2t)\,dt$$

$$=\left[t+\frac{1}{2}\sinh 2t\right]_0^{\sinh^{-1}a}=\sinh^{-1}a+\frac{1}{2}\sinh\left(2\sinh^{-1}a\right)=\sinh^{-1}a+\left(\sinh\sinh^{-1}a\right)\cosh\sinh^{-1}a.$$

$b=\sinh^{-1}a$ とすると，$\frac{e^b-e^{-b}}{2}=\sinh b=a$．これを b について解いて，$b=\log\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$．また，$\sinh\sinh^{-1}a=a$, $\cosh\sinh^{-1}a=\sqrt{1+\sinh^2\left(\sinh^{-1}a\right)}=\sqrt{1+a^2}$ より，

$$L=\log(\sqrt{a^2+1}+a)+a\sqrt{a^2+1}.$$

(4) $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$ と置くと，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ で第2式が満たされる．第1式にこれらを代入して，$a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta+z^2=a^2$．これより，$z=\pm\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2\theta}$．交線は図のようになる．図の対称性より交線の全長 L はその部分



$$C:(x,y,z)=(a\cos\theta,b\sin\theta,\sqrt{a^2-b^2}\sin\theta)\quad\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$$

の長さの8倍となる．ゆえに，

$$L=8\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=8\int_0^{\pi/2}\sqrt{(-a\sin\theta)^2+(b\cos\theta)^2+(\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta)^2}\,d\theta=8\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2}\,d\theta=4\pi a.$$

12.3 (1) 放物線 $P:y=x^2$ と円 $C:(x-r)^2+y^2=r^2, r=2\sqrt{3}$ が囲む部分の面積 S である．

・交点を求める．

$x^2+y^2=4\sqrt{3}x$ に $y=x^2$ を代入して，

$$x^4+x^2-4\sqrt{3}x=x(x-\sqrt{3})(x^2+\sqrt{3}x+4)=0\,.$$

これより， $x=0,\sqrt{3}$ ．交点は $(x,y)=(0,0),(\sqrt{3},3)$．求める面積は

$$S=\int_0^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{r^2-(x-r)^2}-x^2\right)dx=\int_0^{r/2}\sqrt{r^2-(x-r)^2}\,dx-\int_0^{\sqrt{3}}x^2\,dx.$$

右辺第1項は $r-x=r\cos t\ \ (0\le t\le\pi)$ と置いて， $dx=r\sin t dt,\sqrt{r^2-(x-r)^2}=r\sin t$ と

x	$0\ \to\ r/2$
t	$0\ \to\ \pi/3$

より，

$$\int_0^{r/2}\sqrt{r^2-(x-r)^2}\,dx=\int_0^{\pi/3}r\sin t(r\sin t)dt=r^2\int_0^{\pi/3}\sin^2 t\,dt=r^2\int_0^{\pi/3}\frac{1-\cos 2t}{2}dt$$

$$=\frac{r^2}{2}\left[t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi/3}=\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=2\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

第2項は， $\int_0^{\sqrt{3}}x^2\,dx=\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\right)^3=\sqrt{3}$ ゆえ，

$$S=\left(2\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)-\sqrt{3}=2\pi-\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

(2) 方程式を y について解いて，

$$y=-\frac{h}{b}x\pm\frac{1}{b}\sqrt{b-(ab-h^2)x^2}\,.$$

条件より， $ab-h^2>0,b/(ab-h^2)>0$ だから， $r=\sqrt{b/(ab-h^2)},s=\sqrt{ab-h^2}$ と置くと，

$$y=-\frac{h}{b}x\pm\frac{s}{b}\sqrt{r^2-x^2}\ \ .$$

面積 S は2つの曲線 $C_1:y=-\frac{h}{b}x-\frac{s}{b}\sqrt{r^2-x^2},C_2:y=-\frac{h}{b}x+\frac{s}{b}\sqrt{r^2-x^2}\ \ (-r\le x\le r)$ で囲まれる．もちろん， C_2 が C_1 より上にあるので，

$$S=\int_{-r}^{r}\left\{\left(-\frac{h}{b}x+\frac{s}{b}\sqrt{r^2-x^2}\right)-\left(-\frac{h}{b}x-\frac{s}{b}\sqrt{r^2-x^2}\right)\right\}dx=\frac{2s}{b}\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx.$$

右辺の積分は半径 r の半円の面積 $\frac{\pi r^2}{2}$ を表しているので，

$$S=\frac{2s}{b}\frac{\pi r^2}{2}=\frac{2\sqrt{ab-h^2}}{b}\frac{\pi\left(\frac{b}{ab-h^2}\right)}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{ab-h^2}}.$$

12.5 (3)（解説） 積分 $S=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1=\frac{2}{3}$ を考える．区間 $[0,1]$ を n 等分する点を

$$0=a_0<a_1<\cdots<a_n=1,\quad a_i=\frac{i}{n}$$

とする．関数$f(x)=\sqrt{x}$は単調増加なので，小区間$[a_{i-1},a_i]$で$f(a_{i-1})\le f(x)\le f(a_i)$．また，連続関数なので，この小区間で$f(a_{i-1})<f(x)<f(a_i)$なる値を取りうる．ゆえに，等号無しの不等号で，

$$\frac{1}{n}f(a_{i-1})=\int_{a_{i-1}}^{a_i}f(a_{i-1})dx<\int_{a_{i-1}}^{a_i}f(x)dx<\int_{a_{i-1}}^{a_i}f(a_i)dx=\frac{1}{n}f(a_i)\ (1\le i\le n).$$

この不等式を$i=1,2,\cdots,n$で足し合わせて，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a_{i-1})<\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i}f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a_i).$$

$f(x)=\sqrt{x}$ゆえ，

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n-1}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}}<\frac{2}{3}<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}=\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}\right).$$

第1の不等式でnに$n+1$を代入して，$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<\frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1}$．また，第2の不等式から，$\frac{2}{3}n\sqrt{n}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}$を得る．//

（解答例）関数$f(x)=\sqrt{x}$は連続かつ単調増加なので

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}}<\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}.$$

第1の不等式でnに$n+1$を代入して，$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<\frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1}$．また，第2の不等式から，$\frac{2}{3}n\sqrt{n}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}$を得る．//

§１３

13.1 (1) 原始関数を部分積分で求める．

$$F(x)=\int x\cdot\log x\,dx=\frac{x^2}{2}\cdot\log x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\cdot\log x-\frac{x^2}{4}.$$

$x=1$で$f(x)$は連続だから，単純な代入で$F(1)=-\frac{1}{4}$．$x=0$で$f(x)$は存在しないので$x\to+0$の極限を求めておく．

$$\lim_{x\to+0}F(x)=\lim_{x\to+0}\frac{x^2\log x}{2}=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{2x^{-2}}\overset{L}{=}\lim_{x\to+0}\frac{x^{-1}}{-4x^{-3}}=\lim_{x\to+0}\frac{x^2}{-4}=0.$$

以上より，広義積分$S=\int_0^1 x\log x\,dx=F(1)-\lim_{x\to+0}F(x)=-\frac{1}{4}-0=-\frac{1}{4}$.

(2) 変数変換をしてから広義積分を行えばよい.

$r=\dfrac{b-a}{2}, c=\dfrac{a+b}{2}$ と置くと，平方根の中が平方完成され，

$$(x-a)(b-x)=(x-c+r)(c+r-x)=r^2-(x-c)^2.$$

ここで，$x-c=r\cos t\ (0\le t\le \pi)$ と変数変換する．

$$dx=-r\sin t, \sqrt{(x-a)(b-x)}=\sqrt{r^2-(x-c)^2}=\sqrt{r^2-r^2\cos^2 t}=r\sin t, \quad \begin{array}{c|ccc} t & \pi & \leftrightarrow & 0 \\ \hline x & a & \leftrightarrow & b \end{array}$$

ゆえ，

$$S=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx=\int_\pi^0 \frac{-r\sin t dt}{r\sin t}=\int_0^\pi 1dt=\lim_{d\to+0}\left[t\right]_d^{\pi-d}=\lim_{d\to+0}(\pi-2d)=\pi.$$

(3) 原始関数は $F(x)=\int xe^{-x^2}dx=\dfrac{1}{2}\int\left(x^2\right)' e^{-x^2}dx=\dfrac{-e^{-x^2}}{2}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-e^{-x^2}}{2}=0$ であるから，広義積分は，

$$S=\int_0^\infty xe^{-x^2}dx=\lim_{x\to\infty}F(x)-F(0)=0-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

(4) 原始関数を部分積分で求める．

$$F(x)=\int\frac{1}{x^2}\cdot\log(1+x^2)dx=-\frac{1}{x}\cdot\log(1+x^2)-\int-\frac{1}{x}\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx=2\tan^{-1}x-\frac{\log(1+x^2)}{x}.$$

極限を求める．

$$\lim_{x\to+0}\frac{\log(1+x^2)}{x}\overset{L}{=}\lim_{x\to+0}\frac{2x/(1+x^2)}{1}=0,$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+x^2)}{x}\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2x/(1+x^2)}{1}=0$$

より，

$$\lim_{x\to+0}F(x)=2\lim_{x\to+0}\tan^{-1}x-\lim_{x\to+0}\frac{\log(1+x^2)}{x}=0,$$
$$\lim_{x\to\infty}F(x)=2\lim_{x\to\infty}\tan^{-1}x-\lim_{x\to+0}\frac{\log(1+x^2)}{x}=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi.$$

広義積分を求める．

$$\int_0^\infty\frac{\log(1+x^2)}{x^2}dx=\lim_{x\to\infty}F(x)-\lim_{x\to+0}F(x)=\pi.$$