

不変多様体と制御系設計 — 最適制御からサーボ系まで

坂本登
名古屋大学工学研究科
航空宇宙工学専攻

December 17 2010
於首都大学東京南大沢キャンパス

自己紹介

経歴：

- 1991 年北海道大学理学部数学科卒業
- 1996 年名古屋大学工学研究科博士後期課程修了（航空宇宙工学）
- 助手，講師，助教授を経て現在，名古屋大学工学研究科准教授（航空宇宙工学専攻）

専門：非線形制御理論とその応用

共同研究者：

A. J. van der Schaft（オランダ・ Groningen 大学数学科）

S. Celikovsky, B. Rehak（チェコ科学アカデミー自動化情報理論研究所）

Outline

- 「数」「電」「機」と制御工学

Outline

- 「数」「電」「機」と制御工学
- 制御理論の基本問題
 - 最適制御（安定化）
 - サーボ系

Outline

- 「数」「電」「機」と制御工学
- 制御理論の基本問題
 - 最適制御（安定化）
 - サーボ系
- 不変多様体と制御系設計理論
 - ハミルトン・ヤコビ方程式と安定多様体
 - サーボ系設計と中心多様体
 - 近似アルゴリズム

Outline

- 「数」「電」「機」と制御工学
- 制御理論の基本問題
 - 最適制御（安定化）
 - サーボ系
- 不変多様体と制御系設計理論
 - ハミルトン・ヤコビ方程式と安定多様体
 - サーボ系設計と中心多様体
 - 近似アルゴリズム
- 応用例
 - 入力飽和を含むシステム
 - 倒立振子の最適振り上げ安定化
 - 倒立振子のサーボ系設計

Outline

- 「数」「電」「機」と制御工学
- 制御理論の基本問題
 - 最適制御（安定化）
 - サーボ系
- 不変多様体と制御系設計理論
 - ハミルトン・ヤコビ方程式と安定多様体
 - サーボ系設計と中心多様体
 - 近似アルゴリズム
- 応用例
 - 入力飽和を含むシステム
 - 倒立振子の最適振り上げ安定化
 - 倒立振子のサーボ系設計
- おわりに

「数」「電」「機」と制御工学

制御理論における偉人たち

H. W. Bode	数 → 物
R. Bellman	数
R. E. Kalman	電 → 数
A. E. Bryson	航空（機）
J. C. Dyle	電 → 数

「数」「電」「機」と制御工学

制御理論における偉人たち

H. W. Bode	数 → 物
R. Bellman	数
R. E. Kalman	電 → 数
A. E. Bryson	航空（機）
J. C. Dyle	電 → 数

制御工学：

「数学」 $\iff$ 「電気」 $\iff$ 「機械」 が入り乱れて出会うところ

制御理論における基本問題

安定化

- 制御入力 u によって与えられたシステムを漸近安定化する ($x(t) \rightarrow 0$)
- $|u(t)|$: 小, $|x(t)|$: 小 が望ましい

$$J \text{ (評価関数)} = \int_0^{\infty} x^T Q x + u^T R u \, dt \quad (\text{最適制御})$$

出力レギュレーション (サーボ系)

- 制御したい量 (位置, 速度, 姿勢) が目標値に追従する
- 系に加わる外乱が制御したい量に与える影響を除去

最適制御—Bryson の解 (1962)

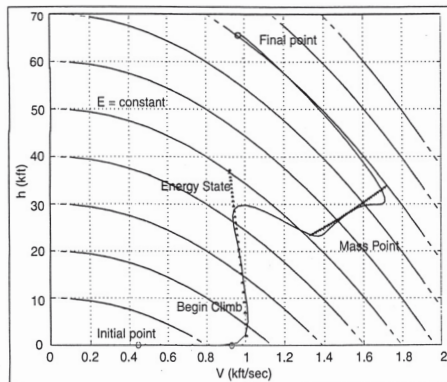
次の迎撃機に対して海拔 0 メートルから指定された高度まで最短時間で上昇する制御入力（迎角） $u(t)$ を設計せよ

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{F(h, M)}{m} \cos u - \frac{D(h, M, u)}{m} - g \sin \gamma \\ \dot{\gamma} &= \frac{L(h, M, u)}{mV} + \frac{F(h, M)}{mV} \sin u - \frac{g \cos \gamma}{V} \\ \dot{h} &= V \sin \gamma \\ \dot{x} &= V \cos \gamma \\ \dot{m} &= \dot{m}(h, M)\end{aligned}$$

V	機体速度
γ	機体速度が水平方向となす角
u	機体迎え角（制御量）
m	機体重量
x	水平距離
$a(h)$	音速（高度の関数）

M	$= V/a(h)$ マッハ数
$\dot{m}(h, M)$	燃料消費率
$F(h, M)$	推力
h	高度
$D(h, M, u)$	抗力

最適制御—Bryson の解 (1962)



- 従来経路の約半分の時間
- 制御工学分野の重要性が認識される契機

出力レギュレーション (サーボ系)



一定時間後に,

$$e(t) \text{ (制御量)} \sim \sum A_i \cos(\Omega_i t + \varphi_i)$$

となるように入力 u を設計せよ

ロボット工学, ファクトリーオートメーション, 航空・船舶などにおける基本技術

制御系の設計 ~ 不変多様体の設計・計算

- 最適制御理論

- ハミルトン・ヤコビ偏微分方程式
- ハミルトン正準方程式の安定多様体

- サーボ系設計（出力レギュレーション問題）

- レギュレータ偏微分方程式
- 中心多様体

不変多様体とは

$\mathbb{R}^n$ 上の動的システム

$$\dot{x} = f(x)$$

に対し, $x \in M$ ならば $\varphi(t, x) \in M, \forall t \in \mathbb{R}$ となる多様体 $M \subset \mathbb{R}^n$

- 安定多様体 W^s

$$W^s := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(t, x) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty\}$$

$f(0) = 0, Df(0)$ が純虚数固有値をもたなければ存在する

不変多様体とは

$\mathbb{R}^n$ 上の動的システム

$$\dot{x} = f(x)$$

に対し, $x \in M$ ならば $\varphi(t, x) \in M, \forall t \in \mathbb{R}$ となる多様体 $M \subset \mathbb{R}^n$

- 安定多様体 W^s

$$W^s := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(t, x) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty\}$$

$f(0) = 0, Df(0)$ が純虚数固有値をもたなければ存在する

- 中心多様体 W^c

W^c は f - 不変多様体, E^c を接空間にもつ. ここで E^c は $Df(0)$ の純虚数固有値に対応する一般化固有ベクトルが張る空間.

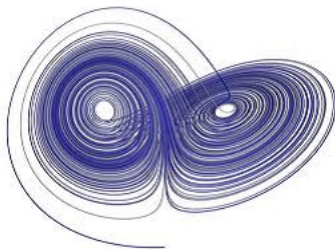
安定多様体の例

ローレンツシステム (カオス)

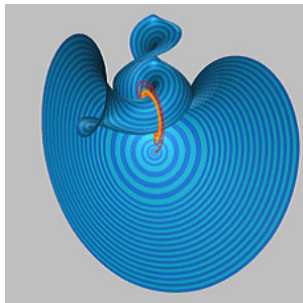
$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = \rho x - y - xz$$

$$\dot{z} = -\beta z + xy$$



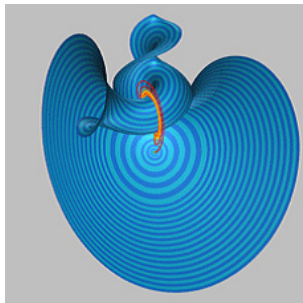
安定多様体の例



(H. Osinga による)

安定多様体，中心多様体を調べることで動的システムの性質がよりよく理解できる．

安定多様体の例



(H. Osinga による)

安定多様体，中心多様体を調べることで動的システムの性質がよりよく理解できる．

今日のお話：現象の解析ではなく，設計理論に現れる不変多様体

最適制御理論と安定多様体

$$(\Sigma_a) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y = h(x(t)) \end{cases}$$

$$J = \int_0^{\infty} y(t)^T Q y(t) + u(t)^T R u(t) dt$$

最適制御理論と安定多様体

$$(\Sigma_a) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y = h(x(t)) \end{cases}$$
$$J = \int_0^{\infty} y(t)^T Q y(t) + u(t)^T R u(t) dt$$

定理

以下の条件 I), II) を満たす解 $V(x)$, $V(0) = 0$ が存在すれば, Σ_a に対する最適入力は次式で与えられる.

$$u = -\frac{1}{2}R^{-1}(x)g(x)^T \frac{\partial V}{\partial x}^T$$

- I) $\frac{\partial V}{\partial x} f(x) - \frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial x} g(x) R^{-1} g(x)^T \frac{\partial V}{\partial x}^T + h(x)^T h(x) = 0$ (HJ eq.)
- II) $f(x) - \frac{1}{2} g(x) R^{-1} g(x)^T \frac{\partial V}{\partial x}^T$ は漸近安定なベクトル場

最適制御理論と安定多様体

$$(\Sigma_a) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y = h(x(t)) \end{cases}$$

$$J = \int_0^{\infty} y(t)^T Q y(t) + u(t)^T R u(t) dt$$

定理

以下の条件 I), II) を満たす解 $V(x)$, $V(0) = 0$ が存在すれば, Σ_a に対する最適入力は次式で与えられる.

$$u = -\frac{1}{2}R^{-1}(x)g(x)^T \frac{\partial V}{\partial x}^T$$

- I) $\frac{\partial V}{\partial x} f(x) - \frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial x} g(x) R^{-1} g(x)^T \frac{\partial V}{\partial x}^T + h(x)^T h(x) = 0$ (HJ eq.)
- II) $f(x) - \frac{1}{2} g(x) R^{-1} g(x)^T \frac{\partial V}{\partial x}^T$ は漸近安定なベクトル場

ハミルトン・ヤコビ方程式

$$(HJ) \quad H(x, p) = p^T f(x) - \frac{1}{2} p^T R(x) p + q(x) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1, \dots, x_n: \text{独立変数} \\ \dots \text{状態空間 } X \\ p_j = \partial V / \partial x_j, \quad j = 1, \dots, n \\ V: \text{未知関数} \end{array} \right.$$

ハミルトン・ヤコビ方程式

$$(HJ) \quad H(x, p) = p^T f(x) - \frac{1}{2} p^T R(x) p + q(x) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1, \dots, x_n: \text{独立変数} \\ \dots \text{状態空間 } X \\ p_j = \partial V / \partial x_j, \quad j = 1, \dots, n \\ V: \text{未知関数} \end{array} \right.$$

$f(x) - R(x)p(x)$ が漸近安定となる解 V を求めよ.

ハミルトン・ヤコビ方程式と安定多様体

$$(HJ) \quad H(x, p) = p^T f(x) - \frac{1}{2} p^T R(x) p + q(x) = 0$$

$f(x) - R(x)p(x)$ が漸近安定となる解を求める

ハミルトン・ヤコビ方程式と安定多様体

$$(HJ) \quad H(x, p) = p^T f(x) - \frac{1}{2} p^T R(x) p + q(x) = 0$$

$f(x) - R(x)p(x)$ が漸近安定となる解を求める



1 階偏微分方程式の理論より

ハミルトンの正準方程式の安定多様体を求める

$$\Sigma_H : \begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = f(x) - R(x)p \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x)^T p + \frac{\partial(p^T R(x)p)^T}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \end{cases}$$

ハミルトン・ヤコビ方程式と安定多様体

$$(HJ) \quad H(x, p) = p^T f(x) - \frac{1}{2} p^T R(x) p + q(x) = 0$$

$f(x) - R(x)p(x)$ が漸近安定となる解を求める



1 階偏微分方程式の理論より

ハミルトンの正準方程式の安定多様体を求める

$$\Sigma_H : \begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = f(x) - R(x)p \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x)^T p + \frac{\partial(p^T R(x)p)}{\partial x}^T - \frac{\partial q}{\partial x} \end{cases}$$

Fact: 正準方程式の安定多様体 Λ は、ラグランジュ部分多様体であり、 Λ 上 x が独立変数にとれるなら、次のようにかける。

$$\Lambda = \left\{ (x, p) \mid p = \frac{\partial V}{\partial x} \right\} \quad (\text{解 } V \text{ の存在定理})$$

安定多様体の近似

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + f(t, x, y) \\ \dot{y} = -A^T y + g(t, x, y) \end{cases} \quad \text{赤: ハミルトン行列のブロック対角化}$$

$A: n \times n, \operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0; f(t, x, y), g(t, x, y):$ 高次項

安定多様体の近似

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + f(t, x, y) \\ \dot{y} = -A^T y + g(t, x, y) \end{cases} \quad \text{赤: ハミルトン行列のブロック対角化}$$

$A: n \times n, \operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0; f(t, x, y), g(t, x, y):$ 高次項

関数列を構成:

$$\begin{cases} x_{k+1} = e^{At} \xi + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s, x_k(s), y_k(s)) ds \\ y_{k+1} = - \int_t^\infty e^{-A^T(t-s)} g(s, x_k(s), y_k(s)) ds \end{cases}$$

for $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$\begin{cases} x_0 = e^{At} \xi \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

ここで $\xi \in \mathbb{R}^n$ は任意パラメータ (十分小)

安定多様体の近似

$$\begin{cases} x_{k+1} = e^{At}\xi + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s, x_k(s), y_k(s)) ds \\ y_{k+1} = - \int_t^\infty e^{-A^T(t-s)} g(s, x_k(s), y_k(s)) ds \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = e^{At}\xi \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

定理:

- $x_k(t, \xi), y_k(t, \xi) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ for all $k = 0, 1, 2, \dots$ for $|\xi| \ll 1$.

安定多様体の近似

$$\begin{cases} x_{k+1} = e^{At}\xi + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s, x_k(s), y_k(s)) ds \\ y_{k+1} = - \int_t^\infty e^{-A^T(t-s)} g(s, x_k(s), y_k(s)) ds \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = e^{At}\xi \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

定理:

- $x_k(t, \xi), y_k(t, \xi) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ for all $k = 0, 1, 2, \dots$ for $|\xi| \ll 1$.
- $x_k(t, \xi), y_k(t, \xi)$ は, $k \rightarrow \infty$ のとき Σ の解へ $[0, \infty)$ 上一様収束

安定多様体の近似

$$\begin{cases} x_{k+1} = e^{At}\xi + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s, x_k(s), y_k(s)) ds \\ y_{k+1} = - \int_t^\infty e^{-A^T(t-s)} g(s, x_k(s), y_k(s)) ds \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = e^{At}\xi \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

定理:

- $x_k(t, \xi), y_k(t, \xi) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ for all $k = 0, 1, 2, \dots$ for $|\xi| \ll 1$.
- $x_k(t, \xi), y_k(t, \xi)$ は, $k \rightarrow \infty$ のとき Σ の解へ $[0, \infty)$ 上一様収束
- $x(t, \xi) := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t, \xi), y(t, \xi) := \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t, \xi)$ (極限関数) も $x(t, \xi), y(t, \xi) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ となる (Σ の安定多様体上の解)

安定多様体の近似

$$\begin{cases} x_{k+1} = e^{At}\xi + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s, x_k(s), y_k(s)) ds \\ y_{k+1} = - \int_t^\infty e^{-A^T(t-s)} g(s, x_k(s), y_k(s)) ds \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = e^{At}\xi \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

$\{(x(t, \xi), y(t, \xi)) \mid |\xi| \ll 1, t \in \mathbb{R}\}$: **安定多様体の媒介変数表示!**

安定多様体の近似

$$\begin{cases} x_{k+1} = e^{At}\xi + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s, x_k(s), y_k(s)) ds \\ y_{k+1} = - \int_t^\infty e^{-A^T(t-s)} g(s, x_k(s), y_k(s)) ds \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = e^{At}\xi \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

$\{(x_{\textcolor{red}{k}}(t, \xi), y_{\textcolor{red}{k}}(t, \xi)) \mid |\xi| \ll 1, t \in \mathbb{R}\}$: 安定多様体の近似!

安定多様体の近似

$$\begin{cases} x_{k+1} = e^{At}\xi + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s, x_k(s), y_k(s)) ds \\ y_{k+1} = - \int_t^\infty e^{-A^T(t-s)} g(s, x_k(s), y_k(s)) ds \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = e^{At}\xi \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

$\{(x_k(t, \xi), y_k(t, \xi)) \mid |\xi| \ll 1, t \in \mathbb{R}\}$: 安定多様体の近似!

- 逐次計算であり，コンピュータ処理に適する
- Matlab 計算プログラムを開発し，様々な応用を行っている（後述）
- 非線形制御における 50 年にわたる壁を越えられるか ???

サーボ系設計と中心多様体



$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$e = h(x, u, w)$$

$$\dot{w} = s(w)$$

一定時間後に,

$$e(t) = h(x(t), u(t), w(t)) = 0$$

サーボ系設計と中心多様体



$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$e = h(x, u, w)$$

$$\dot{w} = s(w)$$

一定時間後に,

$$e(t) = h(x(t), u(t), w(t)) = 0$$

$\Rightarrow$ 不変多様体 $x = \pi(w)$, $u = c(w)$ に収束 (と仮定)

不変多様体条件(偏微分方程式)

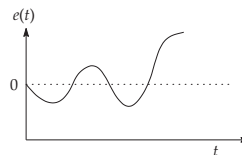
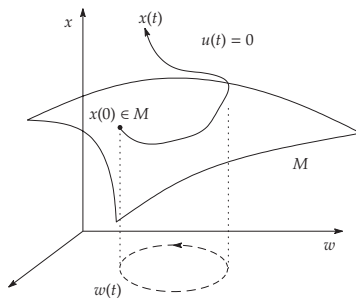
$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) = f(\pi(w), c(w)) \\ 0 = h(\pi(w), c(w), w) \end{cases}$$

サーボ系設計と中心多様体

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$e = h(x, u, w)$$

$$\dot{w} = s(w)$$

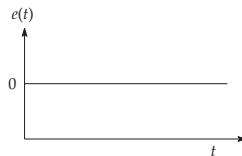
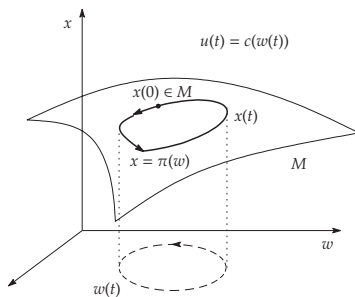


サーボ系設計と中心多様体

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$e = h(x, u, w)$$

$$\dot{w} = s(w)$$

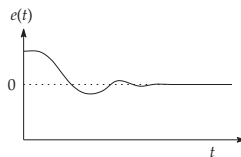
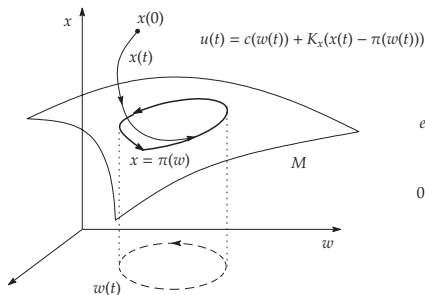


サーボ系設計と中心多様体

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$e = h(x, u, w)$$

$$\dot{w} = s(w)$$



サーボ系設計と中心多様体

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x, y) \\ \dot{y} = By + g(x, y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \lambda_j(A) = 0, \operatorname{Re} \lambda_k(B) < 0, \\ f, g \text{ are higher order } C^2 \text{ nonlinear terms} \end{cases}$$

中心多様体 $W^C : y = h(x)$

サーボ系設計と中心多様体

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x, y) \\ \dot{y} = By + g(x, y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \lambda_j(A) = 0, \operatorname{Re} \lambda_k(B) < 0, \\ f, g \text{ are higher order } C^2 \text{ nonlinear terms} \end{cases}$$

中心多様体 $W^C : y = h(x)$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(Ax + f(x, h(x))) = Bh(x) + g(x, h(x)) \quad (\text{不変性条件})$$

$$\sim \begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) = f(\pi(w), c(w)) \\ 0 = h(\pi(w), c(w), w) \end{cases} \quad (\text{レギュレータ方程式})$$

中心多様体の近似計算

アルゴリズム：

$$x_0(t, \xi) = \xi, h_0(\xi) = 0$$

$$x_{k+1}(t, \xi) = e^{At} \xi + \int_0^t f(x_k(s, \xi), h_k(x_k(s, \xi))) ds$$

$$h_{k+1}(\xi) = \int_{-\infty}^0 e^{-Bs} g(x_k(s, \xi), h_k(x_k(s, \xi))) ds$$

十分小なる $|\xi| \ll 1$ に対して、関数列 $\{x_k(t, \xi)\}, \{h_k(\xi)\}$ は一様に $x(t, \xi), h(\xi)$ へ収束し、 $h(x)$ は中心多様体偏微分方程式を満たす：

$$\frac{\partial h}{\partial x}(Ax + f(x, h(x))) = Bh(x) + g(x, h(x))$$

中心多様体の近似計算

アルゴリズム：

$$x_0(t, \xi) = \xi, h_0(\xi) = 0$$

$$x_{k+1}(t, \xi) = e^{At}\xi + \int_0^t f(x_k(s, \xi), h_k(x_k(s, \xi))) ds$$

$$h_{k+1}(\xi) = \int_{-\infty}^0 e^{-Bs} g(x_k(s, \xi), h_k(x_k(s, \xi))) ds$$

十分小なる $|\xi| \ll 1$ に対して，関数列 $\{x_k(t, \xi)\}, \{h_k(\xi)\}$ は一様に $x(t, \xi), h(\xi)$ へ収束し， $h(x)$ は中心多様体偏微分方程式を満たす：

$$\frac{\partial h}{\partial x}(Ax + f(x, h(x))) = Bh(x) + g(x, h(x))$$

この近似アルゴリズムを用いて，レギュレータ方程式を解く

ここまでのまとめ

- 二大制御問題
 - 最適安定化
 - サーボ系

ここまでのまとめ

- 二大制御問題
 - 最適安定化
 - サーボ系
- 不変多様体の計算
 - 安定多様体
 - 中心多様体

ここまでのまとめ

- 二大制御問題
 - { 最適安定化
 - { サーボ系
- 不変多様体の計算
 - { 安定多様体
 - { 中心多様体
- 設計理論
 - { 構成的証明
 - { 計算プログラム開発

ここまでのまとめ

- 二大制御問題
 - ┌ 最適安定化
 - └ サーボ系
- 不変多様体の計算
 - ┌ 安定多様体
 - └ 中心多様体
- 設計理論
 - ┌ 構成的証明
 - └ 計算プログラム開発
- 泥臭い非線形性も扱う

応用例

- 入力に飽和をもつシステム（絶対値飽和，速度飽和）
- 倒立振子の最適振り上げ制御（実験）
- 倒立振子の出力レギュレーション（実験）

入力飽和システム

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \operatorname{sat}(u)$$

$$J = \int_0^{\infty} x^T Q x + u^T R u \, dt$$

入力飽和システム

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \text{sat}(u)$$

$$J = \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u \, dt$$

ここで sat は m 入力飽和関数を表す

$$\text{sat}(u) = \begin{pmatrix} \text{sat}_1(u_1) \\ \vdots \\ \text{sat}_m(u_m) \end{pmatrix}, \quad \text{sat}_j(z) = \begin{cases} \underline{\sigma}_j & (z < \underline{\sigma}_j) \\ z & (\underline{\sigma}_j \leq z \leq \bar{\sigma}_j) \\ \bar{\sigma}_j & (\bar{\sigma}_j < z) \end{cases}$$

with $\underline{\sigma}_j < 0 < \bar{\sigma}_j$ for $j = 1, \dots, m$.

入力飽和システム

ハミルトン・ヤコビ方程式

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) & \left\{ f(x) + g(x) \operatorname{sat} \left(-\frac{1}{2} R^{-1} g(x)^T \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \right) \right\} \\ & + \operatorname{sat} \left(-\frac{1}{2} R^{-1} g(x)^T \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \right)^T R \operatorname{sat} \left(-\frac{1}{2} R^{-1} g(x)^T \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T \right) \\ & + x^T Q x = 0 \end{aligned}$$

- 従来法（級数展開法）ではほぼ不可能
- 安定多様体法では扱うことができる

入力速度飽和をもつシステム

From NASA website

From NASA website

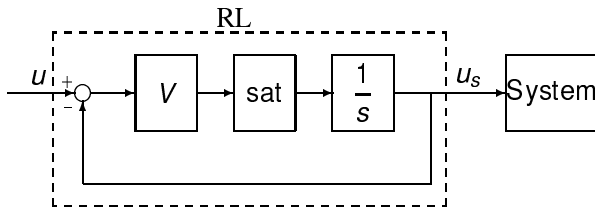
PIO(Pilot Induced Oscillation) **の主要因**

入力速度飽和をもつシステム

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \text{RL}(u)$$

$$J = \int_0^{\infty} x^T Q x + u^T R u \, dt$$

$$\dot{u}_s = \text{sat}(V(u - u_s))$$



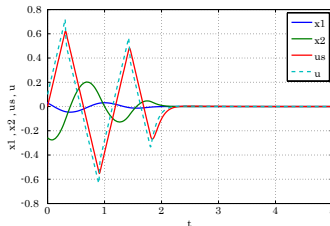
Approximation of rate limiter

入力速度飽和をもつシステム

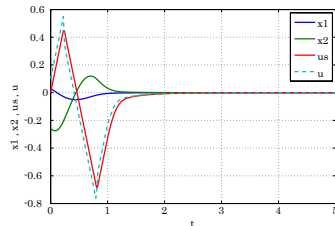
数値例（振動系）：

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -16 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{RL}(u)$$

$$J = \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u dt, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = 0.1$$



Linear, 3-dimensional



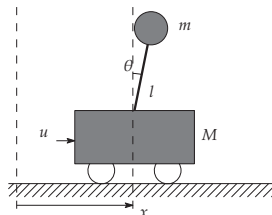
Nonlinear, 3-dimensional

倒立振り子

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + b\dot{x} = u \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos \theta - mgl \sin \theta = 0 \end{cases}$$

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \text{ (状態方程式)}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{mlx_4^2 \sin x_3 - bx_2 - mg \cos x_3 \sin x_3}{M+m \sin^2 x_3} \\ x_4 \\ \frac{(M+m)g \sin x_3 + bx_2 \cos x_3 - mlx_4^2 \sin x_3 \cos x_3}{l(M+m \sin^2 x_3)} \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M+m \sin^2 x_3} \\ 0 \\ \frac{-\cos x_3}{l(M+m \sin^2 x_3)} \end{bmatrix}$$



最適振り上げ制御

$\dot{x} = f(x) + g(x)\text{sat}(u)$ (状態方程式)

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{mlx_4^2 \sin x_3 - bx_2 - mg \cos x_3 \sin x_3}{M + m \sin^2 x_3} \\ x_4 \\ \frac{(M+m)g \sin x_3 + bx_2 \cos x_3 - mlx_4^2 \sin x_3 \cos x_3}{l(M + m \sin^2 x_3)} \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M + m \sin^2 x_3} \\ 0 \\ \frac{-\cos x_3}{l(M + m \sin^2 x_3)} \end{bmatrix}$$

$$J = \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u \, dt$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}, \quad R = 1.$$

最適振り上げ制御

$\dot{x} = f(x) + g(x)\text{sat}(u)$ (状態方程式)

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{mlx_4^2 \sin x_3 - bx_2 - mg \cos x_3 \sin x_3}{M+m \sin^2 x_3} \\ x_4 \\ \frac{(M+m)g \sin x_3 + bx_2 \cos x_3 - mlx_4^2 \sin x_3 \cos x_3}{l(M+m \sin^2 x_3)} \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M+m \sin^2 x_3} \\ 0 \\ \frac{-\cos x_3}{l(M+m \sin^2 x_3)} \end{bmatrix}$$

$$J = \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u \, dt$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}, R = 1.$$

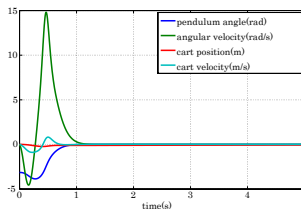
実験装置の制約により**入力電圧飽和** $|\text{sat}(u)| \leq 18[\text{V}]$

最適振り上げ制御

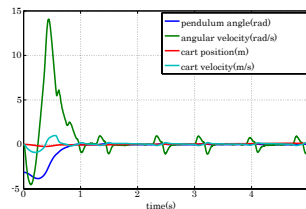
安定多様体法により，入力飽和付 HJ 方程式を解き ...

最適振り上げ制御

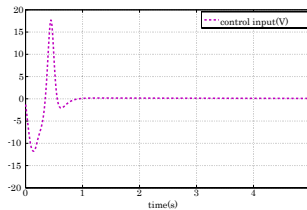
安定多様体法により，入力飽和付 HJ 方程式を解き ...



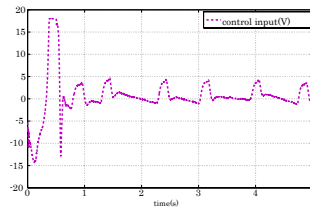
Responses(simulation)



Responses(experiment)



Input(simulation)



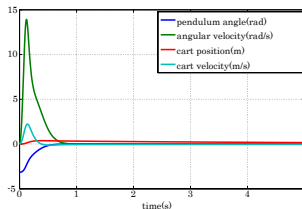
Input(experiment)

最適振り上げ制御

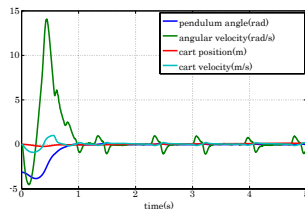
入力飽和なしハミルトン・ヤコビを解いても実験できなかった...

最適振り上げ制御

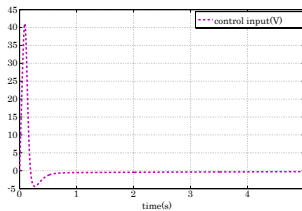
入力飽和なしハミルトン・ヤコビを解いても実験できなかった...



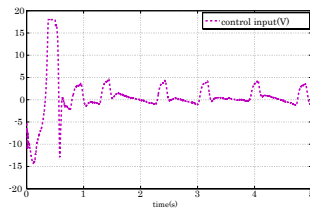
Responses(simulation)



Responses(experiment)



Input(simulation)



Input(experiment)

最適振り上げ制御

Optimal swingup

Optimal swing up

最適振り上げ制御

Robustness test

Robustness test

サーボ系設計

振子を倒すことなく台車を正弦波 $A_m \sin(\Omega t)$ に追従させたい

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w_1(0) \\ w_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_m \end{pmatrix} \quad (\text{目標値発生システム})$$

$$e = x_1 - w_1 = (\text{台車の位置}) - (\text{目標信号}) = (\text{制御出力})$$

サーボ系設計

振子を倒すことなく台車を正弦波 $A_m \sin(\Omega t)$ に追従させたい

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w_1(0) \\ w_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_m \end{pmatrix} \quad (\text{目標値発生システム})$$

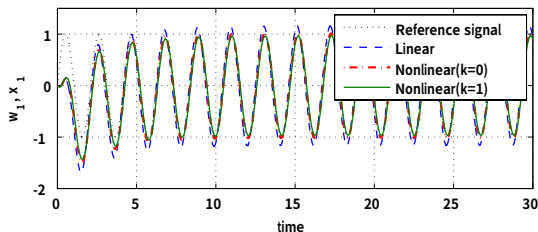
$$e = x_1 - w_1 = (\text{台車の位置}) - (\text{目標信号}) = (\text{制御出力})$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{g}{l} \sin x_3 - \frac{1}{l} \cos x_3 \end{cases} \quad (\text{零ダイナミクス})$$

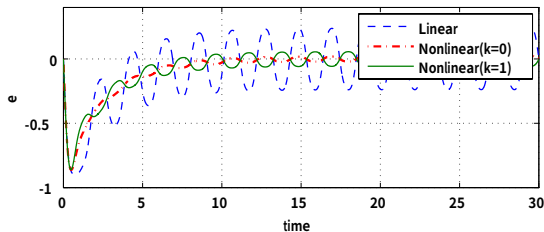
設計：

目標値発生システムと零ダイナミクスの合成系の中心多様体を計算

サーボ系設計



台車の位置 (simulation)



誤差 (simulation)

サーボ系設計

おわりに

- 制御系設計 ～ 不変多様体の計算・設計

おわりに

- 制御系設計 ~ 不変多様体の計算・設計
- 安定多様体（最適制御），中心多様体（サーボ系）

おわりに

- 制御系設計 ～ 不変多様体の計算・設計
- 安定多様体（最適制御），中心多様体（サーボ系）
- 設計論のための不変多様体

おわりに

- 制御系設計 ~ 不変多様体の計算・設計
- 安定多様体（最適制御），中心多様体（サーボ系）
- 設計論のための不変多様体
- 構成的アプローチ，計算アルゴリズム → 実際に使う！

おわりに

- 制御系設計 ~ 不変多様体の計算・設計
- 安定多様体（最適制御），中心多様体（サーボ系）
- 設計論のための不変多様体
- 構成的アプローチ，計算アルゴリズム → 実際に使う！
- 制御工学：小型化，高性能，大規模化，省エネルギー化など
次世代技術の中核をなす

おわりに

- 制御系設計 ~ 不変多様体の計算・設計
- 安定多様体（最適制御），中心多様体（サーボ系）
- 設計論のための不変多様体
- 構成的アプローチ，計算アルゴリズム → 実際に使う！
- 制御工学：小型化，高性能，大規模化，省エネルギー化など次世代技術の中核をなす
- 制御工学：「数」「電」「機」三者がバランスよく協力

おわりに

- 制御系設計 ～ 不変多様体の計算・設計
- 安定多様体（最適制御），中心多様体（サーボ系）
- 設計論のための不変多様体
- 構成的アプローチ，計算アルゴリズム → 実際に使う！
- 制御工学：小型化，高性能，大規模化，省エネルギー化など次世代技術の中核をなす
- 制御工学：「数」「電」「機」三者がバランスよく協力
- 課題（私案）：
数学：物理教育の充実
電気，機械：システム化思考（数理教育）による「職人芸的ものづくり」からの脱却

おわりに

- 制御系設計 ～ 不変多様体の計算・設計
- 安定多様体（最適制御），中心多様体（サーボ系）
- 設計論のための不変多様体
- 構成的アプローチ，計算アルゴリズム → 実際に使う！
- 制御工学：小型化，高性能，大規模化，省エネルギー化など次世代技術の中核をなす
- 制御工学：「数」「電」「機」三者がバランスよく協力
- 課題（私案）：
数学：物理教育の充実
電気，機械：システム化思考（数理教育）による「職人芸的ものづくり」からの脱却

おわりに

- 制御系設計 ～ 不変多様体の計算・設計
- 安定多様体（最適制御），中心多様体（サーボ系）
- 設計論のための不変多様体
- 構成的アプローチ，計算アルゴリズム → 実際に使う！
- 制御工学：小型化，高性能，大規模化，省エネルギー化など次世代技術の中核をなす
- 制御工学：「数」「電」「機」三者がバランスよく協力
- 課題（私案）：
数学：物理教育の充実
電気，機械：システム化思考（数理教育）による「職人芸的ものづくり」からの脱却

ご清聴ありがとうございました