(c_1, c_2, γ)-汚染の下での正規分布の平均のミニマックス検定とそのシミュレーション評価

安 藤 周 平[1]　木 村 美 善[2]

概要

Kakiuchi and Kimura (2012) はモデル分布からの「ずれ」や標本の汚れを記述するための分布近傍として, 3 つのパラメータをもつ (c_1, c_2, γ)-汚染近傍を提案した. この近傍は ε-汚染近傍や全変動近傍などロバスト推測において従来からよく用いられている近傍を特殊な場合として含む新しい近傍である. 本論文では, この (c_1, c_2, γ)-汚染近傍のロバスト検定への応用として, 正規分布の平均のロバスト検定問題を取り上げ, 最も不利な分布の対とミニマックス検定を構成する. そして, このミニマックス検定のロバストネスと良さについてシミュレーションにより明らかにする.

1 はじめに

統計的手法を実際の問題に適用しようとするとき, その手法が有効であるための理論的前提や仮定が満たされている必要がある. しかし, 実際問題の多くはこれらの前提や仮定をせいぜい近似的に満たすだけであり, こうした前提や仮定からの「ずれ」はどうしても避けられない問題である. ロバスト統計的推測論は標本（データ）が仮定された分布（モデル分布）からずれていたり, 少し異なっていると想定される場合に, モデル分布の下では良い統計手法がどのような影響を受けるのかを評価したり, このような状況にふさわしい統計手法はどのようなものかについて追求することを研究課題としている. そして, モデル分布からの多少の「ずれ」があっても, モデル分布の下での「良さ」がさほど失われず, かなり大きな「ずれ」に対しても破綻しないような安心して使用できる, いわゆるロバスト（頑健な）統計手法が望ましいと考える. モデル分布からの「ずれ」の様子や大きさの程度を記述するために, モデル分布の様々な近傍が用いられている.

このようなロバスト推測理論の中で, 代表的なロバスト検定理論が Huber (1965) によって始められた. 彼は近似的にしか知られていない 2 つの確率分布の検定問題に対して確率分布の近傍を導入し, 2 つの近傍間の検定問題として考察した. そして, ε - 汚染近傍と全変動近傍 (total variation neighborhood) について, (1) 2 つの近傍間に最も不利な分布対が存在すること, (2) 最も不利な分布対 (least favorable pair of distributions) から構成される Neyman-Peason 検定がミニマックス検定になること, (3) 検定統計量が 2 つの近傍の中心分布の尤度比を上下で切断した形をしていること, を示した. この Huber の結果を端緒とするロバスト検定理論は, その後 Huber (1968), Huber and Strassen (1973), Rieder (1977), Bednarski (1981), Buja (1986) などによって発展させられていくことになった.

[1]南山大学理工学研究科博士前期課程 2 年
[2]南山大学理工学部教授

ロバスト検定論に限らず, ロバスト推測理論では, 「ずれ」や汚染を表現するために様々な近傍が用いられているが, 最も頻繁に用いられるのは ε-汚染近傍であり, 次いで全変動近傍である (Huber and Ronchetti, 2009 参照). また, 両者を組み合わせて一般化した Rieder (1977) の (ε, δ)-近傍もよく知られている. Ando and Kimura (2003) は Rieder の近傍を一般化した (c, γ)-汚染近傍 (以後 (c, γ)-近傍と省略) を提案し, その特徴づけと推定量のバイアス・ロバストネス問題への応用について論じた. また, Kakiuchi and Kimura (2012) は, 3 つのパラメータをもつ (c_1, c_2, γ)-汚染近傍 (以後 (c_1, c_2, γ)-近傍と省略) を提案した. これは, (c, γ)-近傍を特殊な場合として含み, さらに発展させた新しい近傍である. そして, 近傍の特徴づけを行い、メディアンのロバスト・ノンパラメトリック推定問題に適用した. この (c_1, c_2, γ)-近傍からは, 3 つのパラメータを変えることにより, 多様な新しい近傍が生成できる. (c_1, c_2, γ)-近傍は直感的にわかりやすいだけでなく, Bednarski (1981) の特殊容量により生成される近傍でもあることから, 最も不利な分布対が存在し, ミニマックス検定を構成できる, という長所も兼ね備えている. (c_1, c_2, γ)-近傍については, 板東 (2010) の研究もある.

本論文の目的は, (c_1, c_2, γ)-近傍のロバスト検定への応用として, 正規分布の平均のロバスト検定問題を取り上げ, 2 つの正規分布の (c_1, c_2, γ)-近傍間の Radon-Nikodym 導関数と最も不利な分布対を求めてミニマックス検定を構成し, そのロバスト性について, 最強力検定と比較しながら, シミュレーション評価をすることである. 最も不利な分布対の構成にあたっては, Kakiuchi and Kimura (2012) の特徴づけ定理の適用が必要である. 本論文の結果の一部は安藤・木村 (2015) で報告された.

2 (c_1, c_2, γ)-汚染近傍

$\mathcal{R}$ を実数直線, $\mathcal{B}$ を $\mathcal{R}$ 上のボレル集合族, $\mathcal{M}$ を $(\mathcal{R}, \mathcal{B})$ 上の確率測度の全体からなる集合とする. このとき, $F^\circ \in \mathcal{M}$ の (c_1, c_2, γ)-近傍は

$$\mathcal{P}_{c_1,c_2,\gamma}(F^\circ) = \{G \in \mathcal{M} \mid c_1 F^\circ(A) \le G(A) \le c_2 F^\circ(A) + \gamma, {}^\forall A \in \mathcal{B}\} \tag{2.1}$$

により定義される. ただし, $0 \le c_1 \le 1 - \gamma \le c_2 < \infty,\ c_1 \ne c_2,\ 0 \le \gamma < 1$ である. この近傍はまた

$$\mathcal{P}_{c_1,c_2,\gamma}(F^\circ) = \{G \in \mathcal{M} \mid G(A) \le \min\left(c_2 F^\circ(A) + \gamma,\ c_1 F^\circ(A) + 1 - c_1\right),\ \ \forall A \in \mathcal{B}\}$$

のように表すことができる. いま, 区間 $[0, 1]$ 上の関数 h を

$$h(s) = \min\left(c_2 s + \gamma,\ c_1 s + 1 - c_1\right), \quad 0 \le s \le 1, \tag{2.2}$$

とし, 集合関数 $v : \mathcal{B} \to [0, 1]$ を

$$v(A) = \begin{cases} h(F^\circ(A)), & \phi \ne A \in \mathcal{B} \\ 0, & A = \phi \end{cases} \tag{2.3}$$

により定義すると, Bednarski (1981) により, v は特殊容量 (special capacity) となる. この v を用いると (c_1, c_2, γ)-近傍は

$$\mathcal{P}_{c_1,c_2,\gamma}(F^\circ) = \{G \in \mathcal{M} \mid G(A) \le v(A),\ \ \forall A \in \mathcal{B}\} \tag{2.4}$$

と表すことができる.

c_1, c_2, γ を変化させることによって, F° の (c_1, c_2, γ) - 近傍から次のような多様な近傍を生成できる:

- $(c_1, c_2, \gamma) = (0, 1-\varepsilon, \varepsilon)$ のとき, ε-汚染近傍 $\mathcal{P}_{0,1-\varepsilon,\varepsilon}(F^\circ)$
- $(c_1, c_2, \gamma) = (0, 1, \delta)$ のとき, 全変動近傍 $\mathcal{P}_{0,1,\delta}(F^\circ)$
- $(c_1, c_2, \gamma) = (0, 1-\varepsilon, \varepsilon+\delta)$ のとき, Rieder の近傍 $\mathcal{P}_{0,1-\varepsilon,\varepsilon+\delta}(F^\circ)$
- $(c_1, c_2, \gamma) = (0, c, \gamma)$ のとき, (c, γ) -近傍 $\mathcal{P}_{0,c,\gamma}(F^\circ)$
- $(c_1, c_2, \gamma) = (1-\varepsilon, 1, \delta)$ のとき, TNε-近傍 $\mathcal{P}_{1-\varepsilon,1,\delta}(F^\circ)$
- $(c_1, c_2, \gamma) = (c_1, c_2, 0)$ のとき, G-近傍 $\mathcal{P}_{c_1,c_2,0}(F^\circ)$

F° を $\mathcal{R}$ 上の絶対連続な分布とし, f° を F° の密度関数とする. $\mathcal{M}_c \subset \mathcal{M}$ を絶対連続な分布の全体からなる集合とするとき, F° の (c_1, c_2, γ) - 近傍は次のように表される.

定理 2.1 (Kakiuchi and Kimura, 2012, Theorem 3.1)

$$\mathcal{P}_{c_1,c_2,\gamma}(F^\circ) = \{G = (1-\gamma)F + \gamma K \in \mathcal{M} \mid F \in \mathcal{F}_{c_1,c_2,\gamma}(F^\circ),\ K \in \mathcal{M}\} \tag{2.5}$$

ただし

$$\mathcal{F}_{c_1,c_2,\gamma}(F^\circ) = \left\{ F \in \mathcal{M}_c \;\middle|\; \frac{c_1}{1-\gamma} f^\circ \le f \le \frac{c_2}{1-\gamma} f^\circ \right\} \tag{2.6}$$

であり, f は F の密度関数を表す.

次の定理 2.2 によって, $\mathcal{F}_{c_1,c_2,\gamma}(F^\circ)$ における最小分布 F_L° と最大分布 F_R° は

$$F_L^\circ(x) = \begin{cases} \dfrac{c_2}{1-\gamma} F^\circ(x), & x \le x_L \\[2ex] \dfrac{c_1}{1-\gamma} F^\circ(x) + \left(1 - \dfrac{c_1}{1-\gamma}\right), & x > x_L \end{cases} \tag{2.7}$$

$$F_R^\circ(x) = \begin{cases} \dfrac{c_1}{1-\gamma} F^\circ(x), & x \le x_R \\[2ex] \dfrac{c_2}{1-\gamma} F^\circ(x) + \left(1 - \dfrac{c_2}{1-\gamma}\right), & x > x_R \end{cases} \tag{2.8}$$

によって与えられる. ここで

$$x_L = (F^\circ)^{-1}\left(\frac{1-\gamma-c_1}{c_2-c_1}\right), \tag{2.9}$$

$$x_R = (F^\circ)^{-1}\left(\frac{c_2-1+\gamma}{c_2-c_1}\right). \tag{2.10}$$

定理 2.2　(Kakiuchi and Kimura, 2012, Theorem 3.2)

(i)　$\forall F \in \mathcal{F}_{c_1,c_2,\gamma}(F^\circ)$ に対して

$$F_R^\circ(x) \leq F(x) \leq F_L^\circ(x), \qquad \forall x \in \mathcal{R}. \tag{2.11}$$

(ii)　$\forall G \in \mathcal{P}_{c_1,c_2,\gamma}(F^\circ)$ に対して

$$(1-\gamma)F_R^\circ(x) \leq G(x) \leq F_L^\circ(x) + \gamma, \qquad \forall x \in \mathcal{R}. \tag{2.12}$$

図 1 は F_L°, F_R° の密度関数 f_L°, f_R° の典型的な場合のグラフを示したものである.

3　正規分布の平均のロバスト検定問題

$X_1, \cdots, X_n$ を正規分布 $F_\mu = N(\mu, 1)$ に近似的に従う互いに独立な大きさ n の標本とする. このとき, n 個の標本 $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ に基づく平均 μ のロバスト検定問題は (c_1, c_2, γ)-近傍を用いて次のように定式化される.

$$H_0: \ \mathcal{L}(\mathbf{X}) \in \mathcal{P}^n_{c_1,c_2,\gamma}(F_0) \quad vs. \quad H_1: \ \mathcal{L}(\mathbf{X}) \in \mathcal{P}^n_{c_1,c_2,\gamma}(F_\mu) \quad (\mu > 0) \tag{3.1}$$

ここで, $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ は $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ の確率分布, $\mathcal{P}^n_{c_1,c_2,\gamma}(F_\mu)$ は $\mathcal{P}_{c_1,c_2,\gamma}(F_\mu)$ の n 重積を表し, 帰無仮説と対立仮説の分布は重ならない $(\mathcal{P}_{c_1,c_2,\gamma}(F_0) \cap \mathcal{P}_{c_1,c_2,\gamma}(F_\mu) = \phi)$ と仮定する., 標本 $X_1, \cdots, X_n$ は独立ではあるが, 同一分布は仮定されていないことに注意する. この検定問題に対する検定 φ の最大の大きさ α_φ と最小検出力 $\beta_\varphi(\mu)$ は

$$\begin{aligned} \alpha_\varphi &= \sup\{E_{G_n}[\varphi(\mathbf{X})] : G_n \in \mathcal{P}^n_{c_1,c_2,\gamma}(F_0)\}, & (3.2) \\ \beta_\varphi(\mu) &= \inf\{E_{G_n}[\varphi(\mathbf{X})] : G_n \in \mathcal{P}^n_{c_1,c_2,\gamma}(F_\mu)\} & (3.3) \end{aligned}$$

によって定義される. φ が水準 α $(0 < \alpha < 1)$ であるとは, $\alpha_\varphi \leq \alpha$ を満たすことをいう. Ψ_α を水準 α 検定の全体からなる集合とするとき, $\varphi^* \in \Psi_\alpha$ が水準 α のミニマックス検定であるとは

$$\beta_{\varphi^*}(\mu) = \sup\{\beta_\varphi(\mu) : \varphi \in \Psi_\alpha\}$$

を満たすことをいう.

v_μ を $F^\circ = F_\mu$ として (2.2) と (2.3) により定義される特殊容量 (special capacity) とする. このとき

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{c_1,c_2,\gamma}(F_\mu) &= \{G \in \mathcal{M} \mid G(A) \leq \min\left(c_2F_\mu(A) + \gamma,\, c_1F_\mu(A) + 1 - c_1\right), \ \ \forall A \in \mathcal{B}\} \\ &= \{G \in \mathcal{M} \mid G(A) \leq v_\mu(A), \ \ \forall A \in \mathcal{B}\} \end{aligned}$$

が成り立つ. π が特殊容量 v_μ の v_0 に対する Radon-Nikodym 導関数 ($\pi \in \dfrac{dv_\mu}{dv_0}$) であるとは $\forall\, t \geq 0$ に対して

$$tv_0(\pi > t) + v_\mu(\pi \leq t) = \inf\{tv_0(A) + v_\mu(A^c) \ : \ A \in \mathcal{B}\} \tag{3.4}$$

を満たすことをことをいう．また, $(Q_0,\ Q_\mu)$ が近傍の対 $(\mathcal{P}_{c_1,c_2,\gamma}(F_0),\ \mathcal{P}_{c_1,c_2,\gamma}(F_\mu))$ に対する最も不利な分布対であるとは $Q_0 \in \mathcal{P}_{c_1,c_2,\gamma}(F_0),\ Q_\mu \in \mathcal{P}_{c_1,c_2,\gamma}(F_\mu)$ であり, $\forall t \geq 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
Q_0(\pi > t) &= \sup\{P(\pi > t)\ :\ P \in \mathcal{P}_{c_1,c_2,\gamma}(F_0)\} = v_0(\pi > t) && (3.5)\\
Q_1(\pi \leq t) &= \sup\{P(\pi \leq t)\ :\ P \in \mathcal{P}_{c_1,c_2,\gamma}(F_\mu)\} = v_1(\pi \leq t) && (3.6)
\end{aligned}
$$

が成り立つことをいう．ここで, π は Q_μ の Q_0 に対する Radon-Nikodym 導関数 $\pi \in \frac{dQ_1}{dQ_0}$ である． v_μ の v_0 に対する Radon-Nikodym 導関数 π は また Q_μ の Q_0 に対する Radon-Nikodym 導関数でもあることに注意する． $(\mathcal{P}_{c_1,c_2,\gamma}(F_0),\ \mathcal{P}_{c_1,c_2,\gamma}(F_\mu))$ に対する最も不利な分布対 $(Q_0,\ Q_\mu)$ が存在するとき, $(\mathcal{P}^n_{c_1,c_2,\gamma}(F_0),\ \mathcal{P}^n_{c_1,c_2,\gamma}(F_\mu))$ に対する最も不利な分布対は $(Q^n_0,\ Q^n_\mu)$ により与えられる． ただし, Q^n_0, Q^n_μ は Q_0, Q_μ の n 重積である．また, Q^n_μ の Q^n_0 に対する Radon-Nikodym 導関数は $\pi_n(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \pi(x_i)$ となる．このとき, (3.1) に対する水準 α ミニマックス検定は

$$
\varphi^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \pi_n(\mathbf{x}) < \lambda^*_\alpha \\ \xi, & \pi_n(\mathbf{x}) = \lambda^*_\alpha \\ 1, & \pi_n(\mathbf{x}) > \lambda^*_\alpha \end{cases} \tag{3.7}
$$

により与えられる．ただし， $E_{Q^n_0}[\varphi^*(\mathbf{X})] = \alpha.$

4 Radon-Nikodym 導関数の導出

この節では，特殊容量 v_μ の v_0 に対する Radon-Nikodym 導関数 π を導出する． $F_\mu = N(\mu, 1)$ とし, f_μ を F_μ の密度関数とすると

$$
\frac{dF_\mu}{dF_0}(x) = \frac{f_\mu(x)}{f_0(x)} = \exp(-\frac{1}{2}\mu^2) \cdot \exp(\mu x)
$$

となる．よって， $\dfrac{dF_\mu}{dF_0}(X)$ の F_0 と F_μ の下での分布関数を $G_\mu,\ K_\mu$ とすると

$$
\begin{aligned}
G_\mu(x) &= F_0\left(\frac{dF_\mu}{dF_0}(X) \leq x\right) = F_0(\frac{1}{\mu}\log x + \frac{1}{2}\mu)\\
K_\mu(x) &= F_\mu\left(\frac{dF_\mu}{dF_0}(X) \leq x\right) = F_0(\frac{1}{\mu}\log x - \frac{1}{2}\mu)
\end{aligned}
$$

となる．いま，(3.4) の下限を与える集合を A_t, すなわち

$$
tv_0(A_t) + v_\mu(A^c_t) = \inf\{tv_0(A) + v_\mu(A^c)\ :\ A \in \mathcal{B}\} \tag{4.1}
$$

とすると，(3.4) の右辺は $A = \phi$ のとき 1， $A = \Omega$ のとき t であるから

$$
tv_0(A_t) + v_\mu(A^c_t) \leq \min(t,\ 1)
$$

であり，集合

$$D = \{t \mid tv_0(A_t) + v_\mu(A_t^c) < \min(t,\ 1)\}$$

は端点として $\Delta_1,\ \Delta_2$ を持つ区間となる．ただし，Δ_1, Δ_2 は次式

$$\begin{aligned}\Delta_1 v_0(A_{\Delta_1}) + v_\mu(A_{\Delta_1}^c) &= \Delta_1 &(4.2)\\ \Delta_2 v_0(A_{\Delta_2}) + v_\mu(A_{\Delta_2}^c) &= 1 &(4.3)\end{aligned}$$

を満たす定数である. 集合 A_t は

$$A_t = \begin{cases} \Omega, & 0 \le t \le \Delta_1 \\ \{\frac{dF_\mu}{dF_0} > w(t)\}, & \Delta_1 < t < \Delta_2 \\ \phi, & \Delta_2 \le t < \infty \end{cases} \tag{4.4}$$

と表される., ここで，$w(t)$ は t の非減少関数である．減少列の A_t を用いて，$x \in \mathcal{R}$ に対して　$\pi(x) = \inf\{t |\ x \notin A_t\}$ と定義すると，π は v_μ の v_0 に対する Radon-Nikodym 導関数であり，$A_t = \{\pi > t\}$ が成り立つ.

$$\tilde{w}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \Delta_1 \\ w(t), & \Delta_1 < t < \Delta_2 \\ \infty, & \Delta_2 \le t < \infty \end{cases} \tag{4.5}$$

と定義すると

$$A_t = \{\pi > t\} = \{\ \frac{dF_\mu}{dF_0} > \tilde{w}_0(t)\ \} \tag{4.6}$$

を得る.

単調非減少関数 $w(t)$ を求めたい．いま, $\forall t \ge 0$ に対して

$$\begin{aligned} J_t(x) &= t \cdot h(F_0(\frac{dF_\mu}{dF_0} > x)) + h(F_\mu(\frac{dF_\mu}{dF_0} \le x)) \\ &= t \cdot h(1 - G_\mu(x)) + h(K_\mu(x)), \qquad 0 \le x < \infty \end{aligned}$$

とするとき, $J_t(x)$ を最小にする x が $w(t)$，すなわち

$$w(t) = \arg \min_{0 \le x < \infty} J_t(x) \tag{4.7}$$

である．まず，次の 2 つの不等式関係

$$\begin{aligned} 1 - G_\mu(x) \le \frac{1 - \gamma - c_1}{c_2 - c1} &\qquad \Longleftrightarrow \qquad x \ge b_1 \\ K(x) \le \frac{1 - \gamma - c_1}{c_2 - c1} &\qquad \Longleftrightarrow \qquad x \le b_2 \end{aligned}$$

が成り立つことに注意する．ただし

$$\begin{aligned} b_1 &= \exp\left\{\mu F_0^{-1}\left(\frac{c_2 + \gamma - 1}{c_2 - c_1}\right) - \frac{1}{2}\mu^2\right\}, &(4.8)\\ b_2 &= \exp\left\{\mu F_0^{-1}\left(\frac{1 - \gamma - c_1}{c_2 - c_1}\right) + \frac{1}{2}\mu^2\right\}. &(4.9)\end{aligned}$$

この不等式の関係から次のように4通りの場合に分けられる．

- $x \geq b_1$ かつ $x \leq b_2$ の場合：

$$J_t(x) = J_{t,1}(x) = t\left\{c_2\left(1 - F_0\left(\frac{1}{\mu}\log x + \frac{1}{2}\mu\right)\right) + \gamma\right\} + c_2 F_0\left(\frac{1}{\mu}\log x - \frac{1}{2}\mu\right) + \gamma$$

- $x < b_1$ かつ $x \leq b_2$ の場合：

$$J_t(x) = J_{t,2}(x) = t\left\{c_1\left(1 - F_0\left(\frac{1}{\mu}\log x + \frac{1}{2}\mu\right)\right) + 1 - c_1\right\} + c_2 F_0\left(\frac{1}{\mu}\log x - \frac{1}{2}\mu\right) + \gamma$$

- $x \geq b_1$ かつ $x > b_2$ の場合：

$$J_t(x) = J_{t,3}(x) = t\left\{c_2\left(1 - F_0\left(\frac{1}{\mu}\log x + \frac{1}{2}\mu\right)\right) + \gamma\right\} + c_1 F_0\left(\frac{1}{\mu}\log x - \frac{1}{2}\mu\right) + 1 - c_1$$

- $x < b_1$ かつ $x > b_2$ の場合：

$$J_t(x) = J_{t,4}(x) = t\left\{c_1\left(1 - F_0\left(\frac{1}{\mu}\log x + \frac{1}{2}\mu\right)\right) + 1 - c_1\right\} + c_1 F_0\left(\frac{1}{\mu}\log x - \frac{1}{2}\mu\right) + 1 - c_1$$

よって，b_1 と b_2 の大小関係により，$J(x)$ は次のように表される．

(i) $b_1 \leq b_2$ の場合：

$$J_t(x) = \begin{cases} J_{t,2}(x), & 0 \leq x < b_1 \\ J_{t,1}(x), & b_1 \leq x < b_2 \\ J_{t,3}(x), & b_2 \leq x < \infty \end{cases} \tag{4.10}$$

(ii) $b_1 > b_2$ の場合：

$$J_t(x) = \begin{cases} J_{t,2}(x), & 0 \leq x < b_2 \\ J_{t,4}(x), & b_2 \leq x < b_1 \\ J_{t,3}(x), & b_1 \leq x < \infty \end{cases} \tag{4.11}$$

$t \geq 0$ に対して，$J_t(x)$ を最小にする x を求めるために, まず，(i) と (ii) における x の各3つの範囲ごとに $J_{t,i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ を最小にする x の値を求める．x で微分し，$J'_{t,i}(x) = 0$ の解を求めると，次のようになる．

$$J'_{t,1}(x) = -tc_2 f_0\left(\frac{1}{\mu}\log x + \frac{1}{2}\mu\right)\frac{1}{\mu x} + c_2 f_0\left(\frac{1}{\mu}\log x - \frac{1}{2}\mu\right)\frac{1}{\mu x}$$

より， $J'_{t,1}(x) = 0$ を解くと $x = t$.

$$J'_2(x) = -tc_2 f_0 \left(\frac{1}{\mu} \log x + \frac{1}{2}\mu \right) \frac{1}{\mu x} + c_1 f_0 \left(\frac{1}{\mu} \log x - \frac{1}{2}\mu \right) \frac{1}{\mu x}$$

より， $J'_{t,2}(x) = 0$ を解くと $x = \left(\frac{c_1}{c_2} \right) t$.

$$J'_{t,3}(x) = -tc_2 f_0 \left(\frac{1}{\mu} \log x + \frac{1}{2}\mu \right) \frac{1}{\mu x} + c_1 f_0 \left(\frac{1}{\mu} \log x - \frac{1}{2}\mu \right) \frac{1}{\mu x}$$

より， $J'_{t,3}(x) = 0$ を解くと $x = \left(\frac{c_2}{c_1} \right) t$.

$$J'_4(x) = -tc_1 f_0 \left(\frac{1}{\mu} \log x + \frac{1}{2}\mu \right) \frac{1}{\mu x} + c_1 f_0 \left(\frac{1}{\mu} \log x - \frac{1}{2}\mu \right) \frac{1}{\mu x}$$

より， $J'_{t,4}(x) = 0$ を解くと $x = t$. を得る.,

これらの結果と $J_{t,i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ はいずれも下に凸であることに注意し， c_1, c_2 と b_1, b_2 により定まる t の範囲に応じて， $J_{t,i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ の最小値と J_t の最小値を求める． $b_1 \leq b_2$ の場合には次の 3 通りとなる.

(a) ： $\left(\frac{c_1}{c_2} \right) b_2 \leq b_1 \leq b_2 \leq \left(\frac{c_2}{c_1} \right) b_1$ 　の場合

$$\min_{0 \leq x < \infty} J_t(x) = \begin{cases} \min \left\{ J_{t,2}\left(\left(\frac{c_1}{c_2} \right) t \right),\ J_{t,1}(b_1),\ J_{t,3}(b_2) \right\}, & 0 \leq t \leq \left(\frac{c_1}{c_2} \right) b_2 \\ \min \left\{ J_{t,2}\left(\left(\frac{c_1}{c_2} \right) t \right),\ J_{t,1}(b_1),\ J_{t,3}\left(\left(\frac{c_2}{c_1} \right) t \right) \right\}, & \left(\frac{c_1}{c_2} \right) b_2 \leq t \leq b_1 \\ \min \left\{ J_{t,2}\left(\left(\frac{c_1}{c_2} \right) t \right),\ J_{t,1}(t),\ J_{t,3}\left(\left(\frac{c_2}{c_1} \right) t \right) \right\}, & b_1 \leq t \leq b_2 \\ \min \left\{ J_{t,2}\left(\left(\frac{c_1}{c_2} \right) t \right),\ J_{t,1}(b_2),\ J_{t,3}\left(\left(\frac{c_2}{c_1} \right) t \right) \right\}, & b_2 \leq t \leq \left(\frac{c_2}{c_1} \right) b_1 \\ \min \left\{ J_{t,2}(b_1),\ J_{t,1}(b_2),\ J_{t,3}\left(\left(\frac{c_2}{c_1} \right) t \right) \right\}, & \left(\frac{c_2}{c_1} \right) b_1 \leq t < \infty \end{cases}$$

(b) ： $b_1 \leq \left(\frac{c_1}{c_2} \right) b_2 \leq \left(\frac{c_2}{c_1} \right) b_1 \leq b_2$ の場合

$$\min_{0 \leq x < \infty} J_t(x) = \begin{cases} \min \left\{ J_{t,2}\left(\left(\frac{c_1}{c_2} \right) t \right),\ J_{t,1}(b_1),\ J_{t,3}(b_2) \right\}, & 0 \leq t \leq b_1 \\ \min \left\{ J_{t,2}\left(\left(\frac{c_1}{c_2} \right) t \right),\ J_{t,1}(t),\ J_{t,3}(b_2) \right\}, & b_1 \leq t \leq \left(\frac{c_1}{c_2} \right) b_2 \\ \min \left\{ J_{t,2}\left(\left(\frac{c_1}{c_2} \right) t \right),\ J_{t,1}(t),\ J_{t,3}\left(\left(\frac{c_2}{c_1} \right) t \right) \right\}, & \left(\frac{c_1}{c_2} \right) b_2 \leq t \leq \left(\frac{c_2}{c_1} \right) b_1 \\ \min \left\{ J_{t,2}(b_1),\ J_{t,1}(t),\ J_{t,3}\left(\left(\frac{c_2}{c_1} \right) t \right) \right\}, & \left(\frac{c_1}{c_2} \right) b_1 \leq t \leq b_2 \\ \min \left\{ J_{t,2}(b_1),\ J_{t,1}(b_2),\ J_{t,3}\left(\left(\frac{c_2}{c_1} \right) t \right) \right\}, & b_2 \leq t < \infty \end{cases}$$

(c) : $b_1 \leq \left(\dfrac{c_2}{c_1}\right) b_1 \leq \left(\dfrac{c_1}{c_2}\right) b_2 \leq b_2$ の場合

$$\min_{0\leq x<\infty} J_t(x) = \begin{cases} \min\left\{J_{t,2}\left(\left(\frac{c_1}{c_2}\right)t\right),\ J_{t,1}(b_1),\ J_{t,3}(b_2)\right\}, & 0 \leq t \leq b_1 \\ \min\left\{J_{t,2}\left(\left(\frac{c_1}{c_2}\right)t\right),\ J_{t,1}(t),\ J_{t,3}(b_2)\right\}, & b_1 \leq t \leq \left(\frac{c_2}{c_1}\right) b_1 \\ \min\left\{J_{t,2}(b_1),\ J_{t,1}(t),\ J_{t,3}(b_2)\right\}, & \left(\frac{c_2}{c_1}\right) b_1 \leq t \leq \left(\frac{c_1}{c_2}\right) b_2 \\ \min\left\{J_{t,2}(b_1),\ J_{t,1}(t),\ J_{t,3}\left(\left(\frac{c_2}{c_1}\right)t\right)\right\}, & \left(\frac{c_1}{c_2}\right) b_2 \leq t \leq b_2 \\ \min\left\{J_{t,2}(b_1),\ J_{t,1}(b_2),\ J_{t,3}\left(\left(\frac{c_2}{c_1}\right)t\right)\right\}, & b_2 \leq t < \infty \end{cases}$$

また，同様に $b_1 > b_2$ の場合にも 3 通りがあり，次のようになる．

(d) : $\left(\dfrac{c_1}{c_2}\right) b_1 \leq b_2 \leq b_1 \leq \left(\dfrac{c_2}{c_1}\right) b_2$ 　の場合

$$\min_{0\leq x<\infty} J_t(x) = \begin{cases} \min\left\{J_{t,2}\left(\left(\frac{c_1}{c_2}\right)t\right),\ J_{t,4}(b_2),\ J_{t,3}(b_2)\right\}, & 0 \leq t \leq \left(\frac{c_1}{c_2}\right) b_1 \\ \min\left\{J_{t,2}\left(\left(\frac{c_1}{c_2}\right)t\right),\ J_{t,4}(b_2),\ J_{t,3}\left(\left(\frac{c_2}{c_1}\right)t\right)\right\}, & \left(\frac{c_1}{c_2}\right) b_1 \leq t \leq b_2 \\ \min\left\{J_{t,2}\left(\left(\frac{c_1}{c_2}\right)t\right),\ J_{t,4}(t),\ J_{t,3}\left(\left(\frac{c_2}{c_1}\right)t\right)\right\}, & b_2 \leq t \leq b_1 \\ \min\left\{J_{t,2}\left(\left(\frac{c_1}{c_2}\right)t\right),\ J_{t,4}(b_1),\ J_{t,3}\left(\left(\frac{c_2}{c_1}\right)t\right)\right\}, & b_1 \leq t \leq \left(\frac{c_2}{c_1}\right) b_2 \\ \min\left\{J_{t,2}(b_2),\ J_{t,4}(b_1),\ J_{t,3}\left(\left(\frac{c_2}{c_1}\right)t\right)\right\}, & \left(\frac{c_2}{c_1}\right) b_2 \leq t < \infty \end{cases}$$

(e) : $b_2 \leq \left(\dfrac{c_1}{c_2}\right) b_1 \leq \left(\dfrac{c_2}{c_1}\right) b_2 \leq b_1$ の場合

$$\min_{0\leq x<\infty} J_t(x) = \begin{cases} \min\left\{J_{t,2}\left(\left(\frac{c_1}{c_2}\right)t\right),\ J_{t,4}(b_2),\ J_{t,3}(b_1)\right\}, & 0 \leq t \leq b_2 \\ \min\left\{J_{t,2}\left(\left(\frac{c_1}{c_2}\right)t\right),\ J_{t,4}(t),\ J_{t,3}(b_1)\right\}, & b_2 \leq t \leq \left(\frac{c_1}{c_2}\right) b_1 \\ \min\left\{J_{t,2}\left(\left(\frac{c_1}{c_2}\right)t\right),\ J_{t,4}(t),\ J_{t,3}\left(\left(\frac{c_2}{c_1}\right)t\right)\right\}, & \left(\frac{c_1}{c_2}\right) b_1 \leq t \leq \left(\frac{c_2}{c_1}\right) b_2 \\ \min\left\{J_{t,2}(b_2),\ J_{t,4}(t),\ J_{t,3}\left(\left(\frac{c_2}{c_1}\right)t\right)\right\}, & \left(\frac{c_2}{c_1}\right) b_2 \leq t \leq b_1 \\ \min\left\{J_{t,2}(b_2),\ J_{t,4}(b_1),\ J_{t,3}\left(\left(\frac{c_2}{c_1}\right)t\right)\right\}, & b_1 \leq t < \infty \end{cases}$$

(f) : $b_2 \leq \left(\dfrac{c_2}{c_1}\right) b_2 \leq \left(\dfrac{c_1}{c_2}\right) b_1 \leq b_1$ の場合

$$\min_{0\leq x<\infty} J_t(x) = \begin{cases} \min\left\{J_{t,2}\left(\left(\frac{c_1}{c_2}\right)t\right),\ J_{t,4}(b_2),\ J_{t,3}(b_1)\right\}, & 0 \leq t \leq b_2 \\ \min\left\{J_{t,2}\left(\left(\frac{c_1}{c_2}\right)t\right),\ J_{t,4}(t),\ J_{t,3}(b_1)\right\}, & b_2 \leq t \leq \left(\frac{c_2}{c_1}\right) b_2 \\ \min\left\{J_{t,2}(b_2),\ J_{t,4}(t),\ J_{t,3}(b_1)\right\}, & \left(\frac{c_2}{c_1}\right) b_2 \leq t \leq \left(\frac{c_1}{c_2}\right) b_1 \\ \min\left\{J_{t,2}(b_2),\ J_{t,4}(t),\ J_{t,3}\left(\left(\frac{c_2}{c_1}\right)t\right)\right\}, & \left(\frac{c_1}{c_2}\right) b_1 \leq t \leq b_1 \\ \min\left\{J_{t,2}(b_2),\ J_{t,4}(b_1),\ J_{t,3}\left(\left(\frac{c_2}{c_1}\right)t\right)\right\}, & b_1 \leq t < \infty \end{cases}$$

これらの結果より, c_1, c_2, γ, μ によって決まる 6 通りのうちのどの場合についても　$\forall t \geq 0$ に対して, t の範囲ごとにそれぞれ 3 つの値の最小値を求め, その最小値を与える x の値が $w(t)$ となる. 典型的な場合に $\tilde{w}(t)$ は次のようになる.

$$\tilde{w}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \Delta_1 \\ \left(\frac{c_1}{c_2}\right) t, & \Delta_1 \leq t < a_1 \\ t, & a_1 \leq t < a_2 \\ \left(\frac{c_2}{c_1}\right) t, & a_2 \leq t < \Delta_2 \\ \infty, & \Delta_2 \leq t < \infty \end{cases} \tag{4.12}$$

ここで, a_1, a_2 はそれぞれ

$$J_{t,2}\left(\left(\frac{c_1}{c_2}\right) t\right) = J_{t,1}(t) \tag{4.13}$$

$$J_{t,3}\left(\left(\frac{c_2}{c_1}\right) t\right) = J_{t,1}(t) \tag{4.14}$$

または

$$J_{t,2}\left(\left(\frac{c_1}{c_2}\right) t\right) = J_{t,4}(t) \tag{4.15}$$

$$J_{t,3}\left(\left(\frac{c_2}{c_1}\right) t\right) = J_{t,4}(t) \tag{4.16}$$

の解である.

$u = \tilde{w}(t)$ の逆関数を $\tilde{w}^{-1}(u) = \inf\{t | \tilde{w}(t) \geq u\}$ とすると $\pi = \tilde{w}^{-1}(\frac{dF_\mu}{dF_0})$ であるので π は次のようになる.

$$\pi = \begin{cases} \Delta_1, & 0 \leq \frac{dP_\mu}{dP_0} < \left(\frac{c_1}{c_2}\right) \Delta_1 \\ \left(\frac{c_2}{c_1}\right) \frac{dP_\mu}{dP_0}, & \left(\frac{c_1}{c_2}\right) \Delta_1 \leq \frac{dP_\mu}{dP_0} < \left(\frac{c_1}{c_2}\right) a_1 \\ a_1, & \left(\frac{c_1}{c_2}\right) a_1 \leq \frac{dP_\mu}{dP_0} < a_1 \\ \frac{dP_\mu}{dP_0}, & a_1 \leq \frac{dP_\mu}{dP_0} < a_2 \\ a_2, & a_2 \leq \frac{dP_\mu}{dP_0} < \left(\frac{c_2}{c_1}\right) a_2 \\ \left(\frac{c_1}{c_2}\right) \frac{dP_\mu}{dP_0}, & \left(\frac{c_2}{c_1}\right) a_2 \leq \frac{dP_\mu}{d} P_0 < \left(\frac{c_2}{c_1}\right) \Delta_2 \\ \Delta_2, & \left(\frac{c_2}{c_1}\right) \Delta_2 \leq \frac{dP_\mu}{dP_0} < \infty \end{cases} \tag{4.17}$$

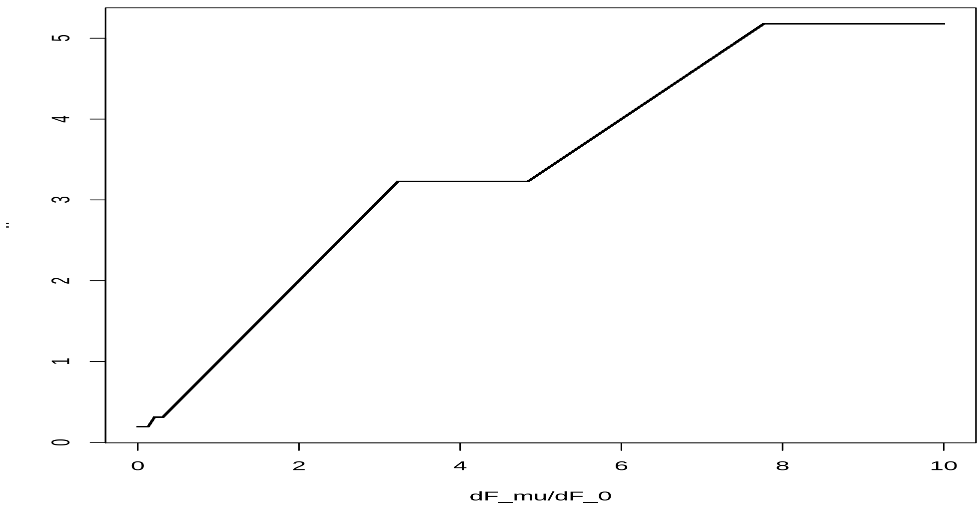

図 1: πのグラフ

5　最も不利な分布対の構成

(c_1, c_2, γ)- 近傍の対 $(\mathcal{P}_{c_1,c_2,\gamma}(F_0),\ \mathcal{P}_{c_1,c_2,\gamma}(F_\mu))$ に対する最も不利な分布対を構成する．構成にあたっては定理 2.1 の結果，すなわち，$\mathcal{P}_{c_1,c_2,\gamma}(F_\mu)$ の任意の要素が

$$\mathcal{F}_{c_1,c_2,\gamma}(F_\mu) = \{\ F \mid \frac{c_1}{1-\gamma} f_\mu \le f \le \frac{c_2}{1-\gamma} f_\mu\ \}$$

の要素 (f は F の密度関数を表す) の γ-汚染で表現されることを利用し，次のように 2 段階で構成する．まず，$Q_0 \in \mathcal{F}_{c_1,c_2,\gamma}(F_0)$，$Q_\mu \in \mathcal{F}_{c_1,c_2,\gamma}(F_\mu)$ であり，これらの Radon-Nikodym 導関数 $\frac{dQ_\mu}{dQ_0}$ が $\frac{dF_\mu}{dF_0}(x) = \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)}$ の小さいところと大きいところを除いて π に等しくなるような分布の対 (Q_0, Q_μ) を構成する．次に，Q_0 と Q_μ の γ-汚染近傍に対する最も不利な分布の対 $(Q_0^*,\ Q_\mu^*)$ を求めると，これが $(\mathcal{P}_{c_1,c_2,\gamma}(F_0),\ \mathcal{P}_{c_1,c_2,\gamma}(F_\mu))$ に対する最も不利な分布の対 になる．Q_0, Q_μ の密度関数 q_0, q_μ は次の条件を満たす必要がある．

条件 1:

(1-1) $$\int_{-\infty}^{\infty} q_0(x)dx = 1$$

(1-2) $$\int_{-\infty}^{\infty} q_\mu(x)dx = 1$$

条件 2:

(2-1) $$\left(\frac{c_1}{1-\gamma}\right) f_0(x) \le q_0(x) \le \left(\frac{c_2}{1-\gamma}\right) f_0(x), \qquad -\infty < x < \infty$$

(2-2) $$\left(\frac{c_1}{1-\gamma}\right) f_0(x-\mu) \leq q_\mu(x) \leq \left(\frac{c_2}{1-\gamma}\right) f_0(x-\mu), \qquad -\infty < x < \infty$$

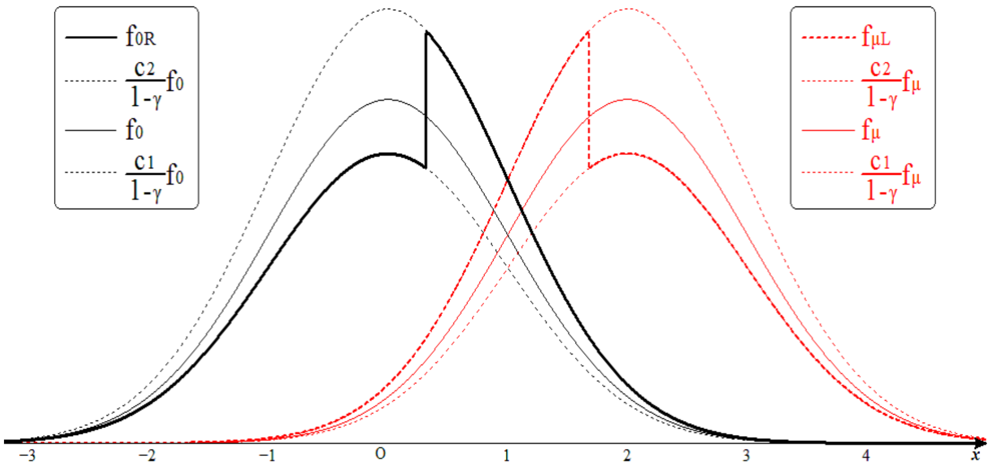

図 2: f_{0R}, $f_{\mu L}$ のグラフ

これらの条件 1 と条件 2 を満たす q_0, q_μ として次のものがある.

$$q_0(x) = \begin{cases} \frac{c_1}{1-\gamma} f_0(x), & 0 \leq \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < \left(\frac{c_1}{c_2}\right) \Delta_1 \\ \frac{c_1}{1-\gamma} f_0(x), & \left(\frac{c_1}{c_2}\right) \Delta_1 \leq \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < \left(\frac{c_1}{c_2}\right) a_1 \\ \frac{c_2}{a_1(1-\gamma)} f_0(x-\mu), & \left(\frac{c_1}{c_2}\right) a_1 \leq \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < a_1 \\ \frac{c_2}{1-\gamma} f_0(x), & a_1 \leq \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < a_2 \\ \frac{c_2}{1-\gamma} f_0(x), & a_2 \leq \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < \left(\frac{c_2}{c_1}\right) a_2 \\ \frac{c_2}{1-\gamma} f_0(x), & \left(\frac{c_2}{c_1}\right) a_2 \leq \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < \left(\frac{c_2}{c_1}\right) \Delta_2 \\ \frac{c_2}{1-\gamma} f_0(x), & \left(\frac{c_2}{c_1}\right) \Delta_2 \leq \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < \infty \end{cases} \tag{5.1}$$

$$
q_\mu(x) = \begin{cases}
\frac{c_2}{1-\gamma} f_0(x-\mu), & 0 \le \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < \left(\frac{c_1}{c_2}\right)\Delta_1 \\
\frac{c_2}{1-\gamma} f_0(x-\mu), & \left(\frac{c_1}{c_2}\right)\Delta_1 \le \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < \left(\frac{c_1}{c_2}\right) a_1 \\
\frac{c_2}{1-\gamma} f_0(x-\mu), & \left(\frac{c_1}{c_2}\right) a_1 \le \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < a_1 \\
\frac{c_2}{1-\gamma} f_0(x-\mu), & a_1 \le \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < a_2 \\
\frac{a_2 c_2}{1-\gamma} f_0(x), & a_2 \le \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < \left(\frac{c_2}{c_1}\right) a_2 \\
\frac{c_1}{1-\gamma} f_0(x-\mu), & \left(\frac{c_2}{c_1}\right) a_2 \le \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < \left(\frac{c_2}{c_1}\right)\Delta_2 \\
\frac{c_2}{1-\gamma} f_0(x-\mu), & \left(\frac{c_2}{c_1}\right)\Delta_2 \le \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < \infty
\end{cases} \tag{5.2}
$$

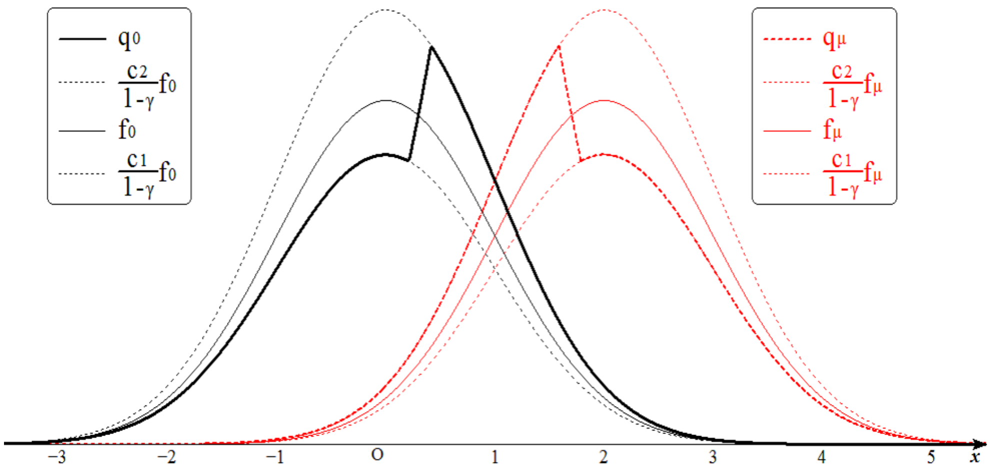

図 3: q_0, q_μ のグラフ

この q_0, q_μ と Huber (1965) の方法を用いることにより，最も不利な分布対 q_0^*, q_μ^* は次式で与えられる．

$$
q_0^*(x) = \begin{cases}
c_1 f_0(x), & 0 \le \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < \left(\frac{c_1}{c_2}\right)\Delta_1 \\
c_1 f_0(x), & \left(\frac{c_1}{c_2}\right)\Delta_1 \le \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < \left(\frac{c_1}{c_2}\right) a_1 \\
\frac{c_2}{a_1} f_0(x-\mu), & \left(\frac{c_1}{c_2}\right) a_1 \le \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < a_1 \\
c_2 f_0(x), & a_1 \le \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < a_2 \\
c_2 f_0(x), & a_2 \le \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < \left(\frac{c_2}{c_1}\right) a_2 \\
c_2 f_0(x), & \left(\frac{c_2}{c_1}\right) a_2 \le \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < \left(\frac{c_2}{c_1}\right)\Delta_2 \\
\frac{c_1}{\Delta_2} f_0(x-\mu), & \left(\frac{c_2}{c_1}\right)\Delta_2 \le \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < \infty
\end{cases} \tag{5.3}
$$

$$
q_\mu^*(x) = \begin{cases}
\Delta_1 c_1 f_0(x), & 0 \le \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < \left(\frac{c_1}{c_2}\right)\Delta_1 \\
c_2 f_0(x-\mu), & \left(\frac{c_1}{c_2}\right)\Delta_1 \le \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < \left(\frac{c_1}{c_2}\right) a_1 \\
c_2 f_0(x-\mu), & \left(\frac{c_1}{c_2}\right) a_1 \le \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < a_1 \\
c_2 f_0(x-\mu), & a_1 \le \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < a_2 \\
a_2 c_2 f_0(x), & a_2 \le \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < \left(\frac{c_2}{c_1}\right) a_2 \\
c_1 f_0(x-\mu), & \left(\frac{c_2}{c_1}\right) a_2 \le \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < \left(\frac{c_2}{c_1}\right)\Delta_2 \\
c_1 f_0(x-\mu), & \left(\frac{c_2}{c_1}\right)\Delta_2 \le \frac{f_0(x-\mu)}{f_0(x)} < \infty
\end{cases} \tag{5.4}
$$

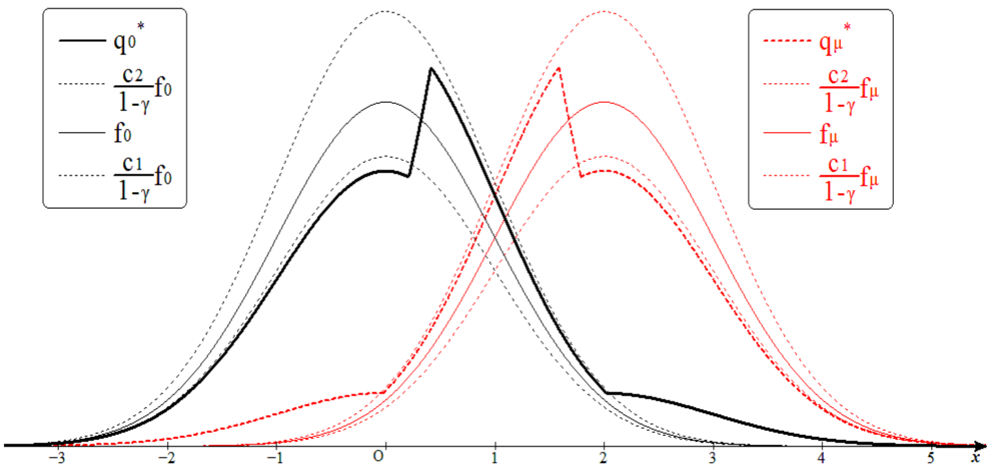

図 4: 最も不利な分布対 q_0^*, q_μ^* のグラフ

6 ミニマックス検定のシミュレーション評価

前節で構成した最も不利な分布対 $(Q_0^*,\ Q_\mu^*)$ を用いることにより, 水準 α ミニマックス検定 φ^* は (3.7) で与えられる. 本節ではミニマックス検定のロバストネスと良さについてシミュレーション評価を行い, パラメトリックな場合の最強力検定と比較する. ミニマックス検定は $c_1 = 0.8,\ c_2 = 1.2,\ \gamma = 0.05,\ \mu = 2$ の場合のものを主として用いることにし, シミュレーションの回数はすべて 100,000 回で行っている. 表 1 は汚染の位置 $\eta = 10$ におけるミニマックス検定と最強力検定のシミュレーション結果をまとめたものであり, 表中の記号の意味は次の通りである:

- λ_α^*: ミニマックス検定 φ^* の 100α %棄却点
- Q_μ^*: 最も不利な分布
- $F_\mu = N(\mu, 1)$
- $F_{\mu CN} = (1-\gamma)F_\mu + \gamma F_{\mu-\eta}$
- $F_{0RCN} = (1-\gamma)F_{0R} + \gamma F_{\mu+\eta}$
- $F_{\mu LCN} = (1-\gamma)F_{\mu L} + \gamma F_{\mu-\eta}$

表 1 の λ_α^* 以外の数値はそれぞれの確率分布による確率を表し, ミニマックス検定の場合は $\pi_n \geq \lambda_\alpha^*$ となる確率であり, 最強力検定の場合は $\sqrt{n}\bar{X} \geq \lambda_\alpha$ となる確率である. ただし, λ_α は $N(0,1)$ の上側 100α %点である. $\gamma = 0.05$ で $\eta = 10$ の位置にあるとき, n が増加するにつれて両検定とも検出力は上がるが, $F_{\mu CN}$ 欄からもわかるように $n = 4$ のあたりで逆転し, ミニマックス検定の優位性が顕著になってくる. 表 2, 3, 4, 5 は外れ値からどのような影響を受けるかを汚染の位置 η を変えて調べたものである. いずれの場合も η が 4 から 7 の間で逆転が起こり, ミニマックス検定の方が良くなっている. 汚染率 γ が大きくなるほど逆転は早くなり, 良さの差も拡大する. 表 6, 7 は代表的な 2 つの場合に, n と γ に対するミニマックス検定の棄却点 λ_α^* の値を与えたものである.

シミュレーションの結果から全体としてわかることは, ミニマックス検定は正規分布の下では, 最強力検定と比べると検出力は高くないが, 汚染が入っても安定していることであり、最強力検定の方は汚染が進むほど検出力が下がってしまので, ミニマックス検定の優位性がますます高まってくることである. また, ミニマックス検定は有意水準がきちんと定まり, 最小検出力も計算できて保障と安心が得られるが, 最強力検定の方は汚染があると水準が上がってしまうため, 有意水準が全く確保できないだけでなく, 汚染や「ずれ」が大きい場合には破綻してしまことにもなる. このように「ずれ」や汚染が想定される場合には, ロバスト統計手法の活用を考えていく必要がある.

表 1: 検定の比較 ($c_1 = 0.8,\ c_2 = 1.2,\ \mu = 2,\ \gamma = 0.05,\ \alpha = 0.05,\ \eta = 10$)

	ミニマックス検定				最強力検定			
n	λ_α^*	Q_μ^*	F_μ	$F_{\mu CN}$	F_{0RCN}	$F_{\mu LCN}$	F_μ	$F_{\mu CN}$
1	5.177	0.392	0.489	0.468	0.109	0.508	0.639	0.610
2	4.087	0.568	0.709	0.641	0.075	0.825	0.882	0.797
3	3.656	0.700	0.860	0.781	0.086	0.937	0.966	0.829
4	2.654	0.810	0.932	0.870	0.094	0.980	0.991	0.809
5	2.016	0.878	0.970	0.926	0.099	0.994	0.998	0.78
7	0.962	0.953	0.994	0.976	0.115	0.999	0.999	0.811
10	0.268	0.989	0.999	0.996	0.131	0.999	0.999	0.897

表 2: 汚染による影響 ($c_1 = 0.8,\ c_2 = 1.2,\ \mu = 2,\ \gamma = 0.05,\ \alpha = 0.05,\ n = 4$)

η	0	2	4	6	8	10	12	15
$F_{\mu CN}^n(\pi_n \geq \lambda_\alpha^*)$	0.932	0.888	0.868	0.868	0.867	0.870	0.863	0.868
$F_{\mu CN}^n(\sqrt{n}\bar{\mathbf{X}} \geq \lambda_\alpha)$	0.991	0.972	0.916	0.851	0.815	0.808	0.807	0.807

表 3: 汚染による影響 ($c_1 = 0.8,\ c_2 = 1.2,\ \mu = 2,\ \gamma = 0.1,\ \alpha = 0.05,\ n = 4$)

η	0	2	4	6	8	10	12	15
$F_{\mu CN}^n(\pi_n \geq \lambda_\alpha^*)$	0.865	0.741	0.708	0.707	0.704	0.707	0.707	0.709
$F_{\mu CN}^n(\sqrt{n}\bar{\mathbf{X}} \geq \lambda_\alpha)$	0.990	0.949	0.837	0.727	0.665	0.651	0.651	0.650

表 4: 汚染による影響 ($c_1 = 0.8,\ c_2 = 1.2,\ \mu = 2,\ \gamma = 0.05,\ \alpha = 0.05,\ n = 7$)

η	0	2	4	6	8	10	12	15
$F_{\mu CN}^n(\pi_n \geq \lambda_\alpha^*)$	0.994	0.983	0.976	0.975	0.976	0.976	0.976	0.977
$F_{\mu CN}^n(\sqrt{n}\bar{\mathbf{X}} \geq \lambda_\alpha)$	0.999	0.998	0.981	0.941	0.887	0.811	0.746	0.708

表 5: 汚染による影響 ($c_1 = 0.8,\ c_2 = 1.2,\ \mu = 2,\ \gamma = 0.1,\ \alpha = 0.05,\ n = 7$)

η	0	2	4	6	8	10	12	15
$F_{\mu CN}^n(\pi_n \geq \lambda_\alpha^*)$	0.980	0.918	0.885	0.888	0.887	0.886	0.888	0.886
$F_{\mu CN}^n(\sqrt{n}\bar{\mathbf{X}} \geq \lambda_\alpha)$	0.999	0.994	0.939	0.842	0.751	0.644	0.549	0.486

表 6: λ_α^* の値 $(c_1 = 0.8,\ c_2 = 1.2,\ \mu = 2,\ \gamma = 0.05,\ \alpha = 0.05)$

γ	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.07	0.1	0.15
$n = 1$	5.285	4.755	6.500	5.992	5.177	4.135	3.238	2.433
$n = 3$	2.122	2.530	3.032	3.506	3.550	4.135	3.328	2.853
$n = 5$	0.595	0.935	1.218	1.575	2.028	2.669	3.255	2.959
$n = 7$	0.148	0.289	0.455	0.719	0.967	1.664	2.664	2.585

表 7: λ_α^* の値 $(c_1 = 0.7,\ c_2 = 1.3,\ \mu = 2,\ \gamma = 0.05,\ \alpha = 0.05)$

γ	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.07	0.1	0.15
$n = 1$	5.147	4.732	5.560	5.097	4.408	3.525	2.764	2.081
$n = 3$	2.657	3.172	3.494	3.958	4.046	3.525	3.251	3.014
$n = 5$	0.997	1.398	1.749	2.202	2.570	3.328	3.509	3.867
$n = 7$	0.317	0.514	0.976	1.111	1.502	2.201	3.126	4.031

7　おわりに

本論文では, $(c_1, c_2, \gamma)-$ 近傍のロバスト検定への応用として, 正規分布の平均のロバスト検定問題を取り上げ, 分散が既知という最も単純で基本的な場合を考察した. $(c_1, c_2, \gamma)-$ 近傍は特殊容量により生成されることから, Bednarski (1981) の一般論が適用できる. したがって, 2 つの $(c_1, c_2, \gamma)-$ 近傍間に最も不利な分布対が存在し, その Neyman-Pearson 検定がミニマックス検定になり, 検定統計量が近傍の中心分布の尤度比の単調非減少関数となることがわかっている. しかし, 特殊容量により生成される具体的な近傍に対して, 最も不利な分布対を構成し, ミニマックス検定のロバストネスや良さを調べた研究は少ない. $(c_1, c_2, \gamma)-$ 近傍は提案されてまだ間もない近傍であるが, 直感的にも理解しやすく, 従来からよく用いられている多くの近傍をその特殊な場合として含む魅力的な近傍である. 正規分布の $(c_1, c_2, \gamma)-$ 近傍に対して得られた Radon-Nikodym 導関数と最も不利な分布対はそれらのグラフに示されているように興味深く極めて示唆に富んだ形をしている. ミニマックス検定のロバストネスと良さについては シミュレーションによってかなり明らかにできたと思われるが, 時間的制約のために十分できなかったところも少なくない. 分散が未知の場合や両側検定の場合, さらに 2 標本検定の場合への取り組みについては今後の課題としたい.

参考文献

Ando, M., Kakiuchi, I. and Kimura, M. (2009). Robust nonparametric confidence intervals and tests for the median in the presence of (c, γ) - contamination, *J. Statist. Plann. Inference*, **139**, 1836-1846.

安藤雅和・木村美善 (2001). ある特別容量近傍とそのロバスト検定への応用, 南山経営研究, 第 3 号, 187-198.

Ando, M. and Kimura, M. (2003). A characterization of the neighborhoods defined by certain special capacities and their applications to bias-robustness of estimates, *J. Statist. Plann. Inference.*, **116**, 61-90.

安藤周平・木村美善 (2015). (c_1, c_2, γ)-汚染の下での正規分布の平均のロバスト検定, 2015 年度統計関連学会連合大会講演報告集, 197.

板東宜彦 (2010). 3 つのパラメータを持つ分布近傍の下でのメディアンのロバスト推測, 神戸大学大学院工学研究科修士論文.

Bednarski, T. (1981). On solutions of minimax tests problems for special capacities, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **58**, 397-405.

Buja, A. (1986). On the Huber Strassen Theorem, *Probab. Th. Rel. Fields*, **73**, 149-152.

Huber, P. J. (1965). Robust version of the probability ratio tests, *Ann. Math. Statist.*, **36**, 1753-1758.

Huber, P. J. (1968). Robust confidence limits, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **10**, 269-278.

Huber, P. J. and Ronchetti, E. M. (2009). *Robust Statistics*, Second Edition, Wiley, New York.

Huber, P. J. and Strassen, V.(1973). Minimax tests and the Neyman-Pearson lemma for capacities, *Ann Statist.*, **1**, 256-263.

Kakiuchi, I. and Kimura, M. (2012). Robust nonparametric inference for the median under a new neighborhood of distributions, *Technical Report (2012-01) of Nanzan Academic Society, Information Sciences and Engineering.*

Rieder, H. (1977). Least favorable pairs for special capacities, *Ann. Statist.*, **6**, 1080-1094.