

# ボール・ビーム系におけるジャグリングタスクの一制御手法

中島 明 (南山大学)

## A Control Method of Juggling Task for Ball-beam System

\*Akira Nakashima (Nanzan University)

**Abstract**— This paper deals with the realization of “Palm circle” task for a ball-beam system in a 2-dimensional space. The palm circle means the situation where the spacial position of the ball is fixed at a point while the relative position of the ball on the beam tracks a cyclic trajectory. First, the equations of motion of the ball and the beam are derived via the Lagrange equation with the constraints that stand for the rolling contact between the ball and the beam. Second, the equations of motion are transformed to the ones in terms of the control variables, i.e. the position of the ball, the relative position of the ball on the beam and the orientation angle of the beam. Third, the LQ optimal servo controller is derived based on the linear system around the origin of the equations of motion for the control. Finally, the effectiveness of the controller with a cyclic trajectory of ball on the beam is verified by numerical simulations.

**Key Words:** Ball-beam system, contact juggling, dynamic manipulation, LQ servo control

### 1 はじめに

人間は様々なタスクを行うことが可能であり、指先の精密な動作による物体の把持・操り<sup>1)</sup>、ボールの打ち上げ<sup>2)</sup>、ボールジャグリング<sup>3)</sup>、卓球ロボット<sup>4)</sup>など、多種多様である。このような物体の動特性を利用するロボットによるタスクはダイナミックマニピュレーション<sup>5)</sup>と呼ばれており、人間の巧みさを表すものとして注目を集めている。上記で述べた把持・操りはロボットの指先と物体との接触拘束により望みの把持力・操り力を発生させることで望みの運動を実現しており、一方、ボール打ち上げ、ボールジャグリング、卓球ロボットなどは、ロボットはボールとの衝突による撃力をボールに伝えることで望みのタスクを達成している。前者は接触という持続的な拘束を利用しており、後者は衝突という離散的な拘束、インタラクションを利用している。これらのタスクとは異なり、一部の可動部分に駆動要素を持たない、いわゆる劣駆動ロボット<sup>6)</sup>と呼ばれるものがある。このようなロボットは様々な種類があり、体操選手が鉄棒を行う様子をモデル化した体操ロボット<sup>7)</sup>が代表的であり、制御理論の適用例題として有名な倒立振り<sup>8)</sup>も劣駆動機械の一種である。倒立振子は振子を振り上げるアーム部が1自由度である場合が一般的であるが、人間の巧みなタスクとして有名ないわゆる“逆さほうき”においては箒を支える手先はより多くの自由度を有している。そのような状況を考慮した、3次元運動を行う平板に支持された倒立振り<sup>9)</sup>も取り扱われている。これらは重力場における劣駆動系であり、重力の働かない平面内での劣駆動マニピュレータ<sup>10)</sup>も他に研究されている。

重力下での劣駆動系の例として、平板に支持され転がる球から構成されるボール・プレート系、板に支持されて転がる球から構成されるボール・ビーム系がある。ボール・プレート系における転がり接触は非ホロノミック拘束<sup>11)</sup>であり、滑らかな状態フィードバックで安定化できない<sup>12)</sup>という強い非線形を有する特殊な系である。このボール・プレート系は、板を手の平と



Fig. 1: A task of Contact juggling -Palm circle.

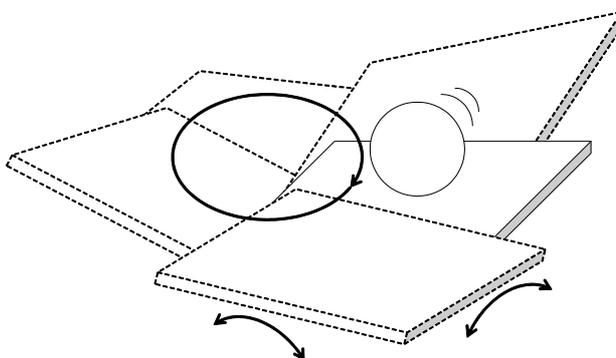


Fig. 2: Palm circle task by a ball-plate system.

見立てることで、人間の巧みな動作の好例であるコンタクトジャグリング<sup>13)</sup>における幾つかのトリックを表現する系となる。コンタクトジャグリングの代表的なトリックとして、Fig. 1に示すようなパームサークルと呼ばれるものがある。分かりやすくするため、Fig. 2のようにボール・プレート系を用いて説明する。プレート(手の平)は空間においてほぼ水平面内で円軌道を描き、ボールもプレート上において円軌道を描く。その一方で、ボールの位置は空間上においてほぼ変動がなく、あたかも止まっているように見える。このように相対運動と絶対運動が同時に精密に制御された非常に巧みな動作であるが、このような運動をロボットで実現している研究は筆者の知る限りで未だ存在しない。この系は先ほど述べたように非ホロノミック系で非常

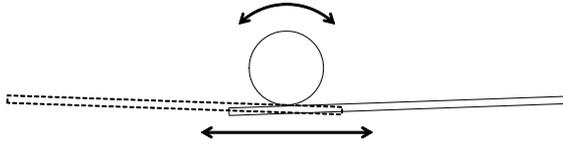


Fig. 3: A ball-beam system with the palm circle task.

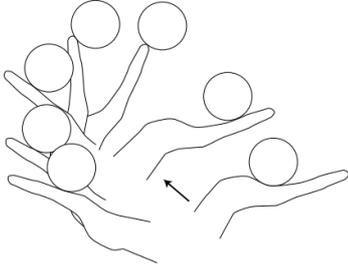


Fig. 4: Butterfly task of Cotnact juggling<sup>14)</sup>.

に強い非線形性を持つため、パームサークルを実現する制御則をすぐに見出すことは難しい。そこで本研究では、まずは運動を2次元平面に限定したボール・ビーム系に関して、3次元でのパームサークルに対応する2次元パームサークルとも呼ぶべき運動を実現する制御系を構築する。具体的には、Fig. 3にあるように、ビームが周期的に左右に運動して、ボールがビーム上を転がるにも関わらず、ボールの中心位置が2次元空間の一点において停止している状況を実現することを目指す。ボール・ビーム系においては、コンタクトジャグリングの他のトリックとして、バタフライ<sup>14)</sup>を実現した研究がある。Fig. 4にあるように、ボールが離れない状態を保ちつつ、手の平と手の甲をボールが転がりながら往復する運動である。このようにバタフライを実現した研究は存在するが、パームサークルはボール・ビーム系においても未だない。ここで、本研究で取り扱うボール・ビーム系において、ビームは位置・姿勢の3自由度が可能な自由度の高い系であり、制御理論の適用例として良く用いられるような、ビームが1自由度の回転のみであるような系<sup>15)</sup>とは違うことに注意されたい。そのような簡易的なボール・ビーム系ではビーム上のボール位置を制御するのみであり、制御問題として根本的に異なるものである。

ボール・ビーム系においてパームサークルを実現する制御系を構成するため、まず初めに運動方程式を定式化する。ここで、ボールとビームの接触条件は転がり接触であり、得られる系は拘束条件付きとなる。したがって、ボールとビームの相互作用を表す接触力(拘束力)を含んだ形式として表現される。この接触力を考慮することで、摩擦条件を満たすような制御系の検証も可能となる。次に、パームサークルの達成に適切な制御変数、すなわち、ボールの空間位置、ボールのビーム上の位置、プレートの姿勢角を、ボール・ビーム系の一般化座標を用いて表現する。得られた関係式を用いて、運動方程式を制御変数に基づく形式に変換し、接触力が消去されることを示す。さらに、この制御変数に関する運動方程式を用いて、制御系設計を行う。具体的には、原点近傍で線形化することで、線形

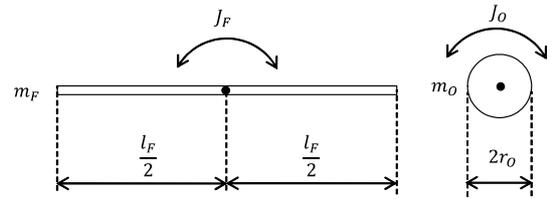


Fig. 5: Geometric parameters of the ball and the beam.

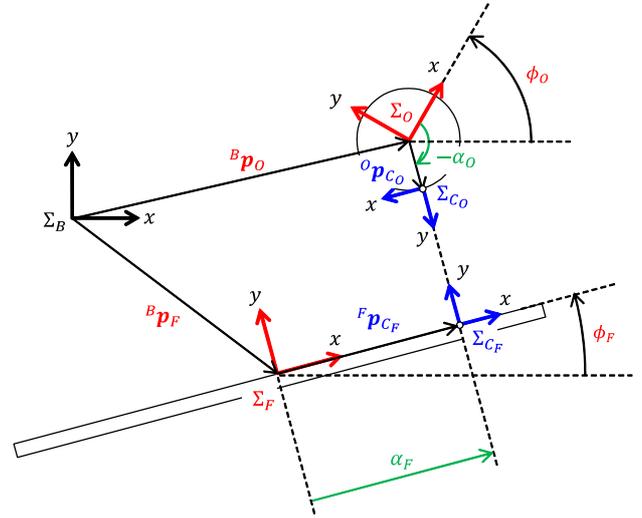


Fig. 6: Configuration of the ball-beam system.

システムを導出する。線形システムに対して、LQ最適サーボ系を設計することで制御則を導出する。ここで、目標値として、ボール位置、ビーム姿勢に関して原点、ボールのビーム上の位置に関して周期軌道を設定することで、パームサークルが実現されることが期待される。最後に、この制御則および目標値を初めに導出した運動方程式に適用した数値シミュレーションを行うことで、制御則の有効性を検証する。ここで、制御性能の改善のため、重力補償項の付加、および目標軌道からの誤差をフィードバック変数に変更するなどの処置を試みる。

## 2 モデリング

### 2.1 システム構成

システムを構成する板(ビーム)と球(ボール)のパラメータをFig. 6に示す。ビームは厚みのない薄板、ボールは円であり、材質は均一であるとする。ビームは全長 $l_F$ 、質量は $m_O$ であり、中心まわりの慣性モーメントは $J_F = \frac{1}{12}m_F l_F^2$  [kg·m<sup>2</sup>]である。ボールは半径 $r_O$  [m]、質量は $m_O$  [kg]であり、中心まわりの慣性モーメントは $J_O = \frac{1}{2}m_O r_O^2$  [kg·m<sup>2</sup>]である。以降では、ビームを指先(Finger)、球を対象物(Object)と呼称するものとする。

次に、Fig. 6にシステムの座標系および変数を示す。基準座標系 $\Sigma_B$ が2次元空間内に固定されており、 $y$ 軸は鉛直上向きであるとする。指先の中心に指先座標系 $\Sigma_F$ を固定し、 $x$ 軸は長手方向に沿うように定める。対象物座標系 $\Sigma_O$ については、対象物の中心に固定する。変数として、基準座標系 $\Sigma_B$ に関する指先座標系の位

置・姿勢を  $({}^B\mathbf{p}_F, {}^B\mathbf{R}_F) \in \text{SE}(2)$  で表すものとする。ここで、 ${}^B\mathbf{p}_F \in \mathbb{R}^2$  は  $\Sigma_B$  の原点から  $\Sigma_F$  の原点までの位置ベクトル、 ${}^B\mathbf{R}_F \in \text{SO}(2)$  は  $\Sigma_B$  から見た  $\Sigma_F$  の姿勢を表す回転行列である。また、対象物座標系  $\Sigma_O$  についても同様にして位置・姿勢を  $({}^B\mathbf{p}_O, {}^B\mathbf{R}_O) \in \text{SE}(2)$  で表現する。なお、 ${}^B\mathbf{R}_F, {}^B\mathbf{R}_O$  は 2 次元空間における回転行列であるため、それぞれ  $\phi_F, \phi_O$  の 1 変数のみを用いて表現することができる。

$${}^B\mathbf{R}_F := \mathbf{R}(\phi_F), \quad {}^B\mathbf{R}_O := \mathbf{R}(\phi_O) \quad (1)$$

ただし  $\phi_F, \phi_O \in \mathbb{R}$  はそれぞれ  $\Sigma_B$  の  $x$  軸から  $\Sigma_F, \Sigma_O$  の  $x$  軸までのなす角であり、 $\mathbf{R}(\phi) \in \text{SO}(2)$  は以下で定義される回転行列である。

$$\mathbf{R}(\phi) := \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad \phi \in \mathbb{R} \quad (2)$$

なお、この回転行列 (2) 式の諸性質は付録 A にまとめられた。したがって、指先、対象物の位置・姿勢を表す一般化座標は次のように定義される。

$$\mathbf{q} := \begin{bmatrix} \mathbf{q}_F \\ \mathbf{q}_O \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad \mathbf{q}_F := \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{p}_F \\ \phi_F \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_O := \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{p}_O \\ \phi_O \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (3)$$

さらに、指先と対象物の接触状態を表す座標を導入する。Fig. 6 では説明のため指先と対象物を離して描いてあるが、指先、対象物の共通法線とそれぞれの表面が交わる点を接触点として定義する。このそれぞれの接触点に、接触座標系  $\Sigma_{C_F}, \Sigma_{C_O}$  の原点を設置し、いずれも  $y$  軸が表面外向き法線となり、右手座標系となるように定義する。これら  $\Sigma_{C_F}, \Sigma_{C_O}$  の位置・姿勢はそれぞれ指先および対象物座標系  $\Sigma_F, \Sigma_O$  を基準として  $({}^F\mathbf{p}_{C_F}, {}^F\mathbf{R}_{C_F}), ({}^O\mathbf{p}_{C_O}, {}^O\mathbf{R}_{C_O}) \in \text{SE}(2)$  で表されるが、物体表面に存在することから、実際には 1 つの変数で表現可能である。

$${}^F\mathbf{p}_{C_F} = \begin{bmatrix} \alpha_F \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^F\mathbf{R}_{C_F} = \mathbf{I}_2 \quad (4)$$

$${}^O\mathbf{p}_{C_O} = \begin{bmatrix} r_O \cos \alpha_O \\ r_O \sin \alpha_O \end{bmatrix}, \quad {}^O\mathbf{R}_{C_O} = \mathbf{R}(\alpha_O - \frac{\pi}{2}) \quad (5)$$

ここで  $\alpha_F \in \mathbb{R}$  は  $\Sigma_F$  から  $\Sigma_{C_F}$  の原点までの符号付き距離であり、 $\alpha_O \in \mathbb{R}$  は  $\Sigma_O$  の  $x$  軸から  $\Sigma_{C_O}$  の  $y$  軸までのなす角である。これら  $\alpha_F, \alpha_O$  を接触座標と呼ぶこととする。

最後に、系への入力について述べる。指先と対象物から構成されるボール・ビーム系に対しては、指先座標系  $\Sigma_F$  の原点に作用する並進力  ${}^B\mathbf{f}_F \in \mathbb{R}^2$ 、モーメント  $\tau_F \in \mathbb{R}$  を入力として扱うものとする。

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{f}_F \\ \tau_F \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (6)$$

## 2.2 拘束条件

### 2.2.1 接触条件

指先側と対象物側の接触点は空間において一致しており、以下のように定式化される。

$${}^B\mathbf{p}_F + {}^B\mathbf{R}_F {}^F\mathbf{p}_{C_F} = {}^B\mathbf{p}_O + {}^B\mathbf{R}_O {}^O\mathbf{p}_{C_O} \quad (7)$$

また、接触座標系の姿勢に関しても次の関係が成り立つ。

$${}^B\mathbf{R}_F {}^F\mathbf{R}_{C_F} {}^C_F\mathbf{R}_{C_O} = {}^B\mathbf{R}_O {}^O\mathbf{R}_{C_O} \quad (8)$$

なお、Fig. 6 より明らかに

$${}^F\mathbf{R}_{C_F} = \mathbf{I}_2, \quad {}^C_F\mathbf{R}_{C_O} = \mathbf{R}(\pm\pi) \quad (9)$$

である。特に、(7) 式は指先と対象物が接触している拘束条件である<sup>1</sup>。これら (7), (8) 式により、接触座標  $\alpha_F, \alpha_O$  を一般化座標  $\mathbf{q}_F, \mathbf{q}_O$  を用いて表すことができる。まず  $\alpha_F$  について考える。(7) 式を  ${}^F\mathbf{p}_{C_F}$  について解き、(8), (9), (5) 式を考慮すると

$$\begin{aligned} {}^F\mathbf{p}_{C_F} &= {}^B\mathbf{R}_F^T ({}^B\mathbf{p}_O - {}^B\mathbf{p}_F) + {}^B\mathbf{R}_F^T {}^B\mathbf{R}_O {}^O\mathbf{p}_{C_O} \\ &= {}^B\mathbf{R}_F^T ({}^B\mathbf{p}_O - {}^B\mathbf{p}_F) - {}^O\mathbf{R}_{C_O}^T {}^O\mathbf{p}_{C_O} \\ &= {}^B\mathbf{R}_F^T ({}^B\mathbf{p}_O - {}^B\mathbf{p}_F) - r_O \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

となり、(4) 式より、 $\alpha_F$  は次のように与える。

$$\alpha_F = \mathbf{e}_x^T {}^B\mathbf{R}_F^T ({}^B\mathbf{p}_O - {}^B\mathbf{p}_F) \quad (10)$$

ただし、 $\mathbf{e}_x := [1, 0]^T$ 、 $\mathbf{e}_y := [0, 1]^T$  であり、 $\mathbf{e}_x^T \mathbf{e}_y = 0$  の関係を用いた。次に、 $\alpha_O$  については、(8), (10) 式および付録 A の回転行列の性質を用いれば

$$\alpha_O = \phi_F - \phi_O - \frac{\pi}{2} \quad (11)$$

となることが容易に導かれる<sup>2</sup>。

### 2.2.2 転がり接触条件

(7) 式は指先と対象物が接触している条件であるが、転がり接触である条件ではない。接触点において横滑りしない条件とは、指先接触点と対象物接触点の接触点速度が等しいことであり、次のように定式化される。

$${}^B\mathbf{R}_F {}^F\dot{\mathbf{p}}_{C_F} = {}^B\mathbf{R}_O {}^O\dot{\mathbf{p}}_{C_O} \quad (12)$$

(12) 式は、(7), (8) 式を用いて展開すれば

$$\dot{\alpha}_F = r_O \dot{\alpha}_O \quad (13)$$

となり、(12) 式は本質的に 1 つの条件式である。

次に、一般化座標において成り立つ転がり接触条件を導く。(7) 式を時間微分して (12) 式を用いれば

$${}^B\dot{\mathbf{p}}_F + {}^B\dot{\mathbf{R}}_F {}^F\mathbf{p}_{C_F} = {}^B\dot{\mathbf{p}}_O + {}^B\dot{\mathbf{R}}_O {}^O\mathbf{p}_{C_O}$$

となり、付録 A の回転行列の性質を用いれば次の関係式を得る。

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (14)$$

ただし

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &:= [\mathbf{A}_F(\mathbf{q}) \quad -\mathbf{A}_O(\mathbf{q})] \in \mathbb{R}^{2 \times 6} \\ \mathbf{A}_F &:= [\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{R}(\frac{\pi}{2})^B \mathbf{R}_F {}^F\mathbf{p}_{C_F}] \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \\ \mathbf{A}_O &:= [\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{R}(\frac{\pi}{2})^B \mathbf{R}_O {}^O\mathbf{p}_{C_O}] \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>姿勢に関する (8) 式はあくまで座標系の姿勢に関して一般的に関係であり、拘束条件ではないことに注意されたい。

<sup>2</sup> ${}^C_F\mathbf{R}_{C_O} = \mathbf{R}(-\pi)$  として求めた。

## 2.3 運動方程式

ボール・ビーム系のラグランジュ関数は以下のように与えられる。

$$L = \frac{1}{2} m_F {}^B \|\dot{\mathbf{p}}_F\|^2 + \frac{1}{2} J_F \dot{\phi}_F^2 + \frac{1}{2} m_O {}^B \|\dot{\mathbf{p}}_O\|^2 + \frac{1}{2} J_O \dot{\phi}_O^2 - (m_F g e_y^{\text{T}B} \mathbf{p}_F + m_O g e_y^{\text{T}B} \mathbf{p}_O) \quad (15)$$

ただし  $g = 9.81$  [m/s<sup>2</sup>] は重力定数である。このラグランジュ関数 (15) 式を、以下の拘束条件を考慮したラグランジュ方程式に適用する。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^{\text{T}} = \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^{\text{T}} - \mathbf{A}^{\text{T}} \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\Upsilon} \quad (16)$$

ここで、 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^2$  はラグランジュの未定乗数であり、

$$\mathbf{F}_C := -\mathbf{A}^{\text{T}} \boldsymbol{\lambda} \quad (17)$$

は拘束を成立させるために必要な拘束力である。未定乗数  $\boldsymbol{\lambda}$  の物理的な意味としては、接触点において指先から対象物側に作用する接触力であり、その成分は基準座標系  $\Sigma_B$  で表現されたものである。

$$\boldsymbol{\lambda} = {}^B \mathbf{f}_C = \begin{bmatrix} {}^B f_{C_x} \\ {}^B f_{C_y} \end{bmatrix} \quad (18)$$

また、 $\boldsymbol{\Upsilon} \in \mathbb{R}^6$  は系に作用する非保存外力であり、指先への入力となる。

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{B} \mathbf{u}, \quad \mathbf{B} := \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (19)$$

以上から、ボール・ビーム系の運動方程式は次のように導出される。

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_g = -\mathbf{A}^{\text{T}} \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (20)$$

ただし

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &:= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_F & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{M}_O \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6} \\ \mathbf{M}_F &:= \begin{bmatrix} m_F \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & J_F \end{bmatrix}, \mathbf{M}_O := \begin{bmatrix} m_O \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & J_O \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \\ \mathbf{F}_g &:= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{g_F} \\ \mathbf{F}_{g_O} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \\ \mathbf{F}_{g_F} &:= \begin{bmatrix} m_F e_y \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_{g_O} := \begin{bmatrix} m_O e_y \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

## 2.4 未定乗数の算出

拘束条件付きのシステムでは、系全体は運動方程式の (20) 式と拘束条件 (14) 式の両式により記述される。実際に系の応答を数値計算などにより解くためには、いくつかの手法があるが、その中の一つが未定乗数を求める<sup>16)</sup> ことである。拘束条件 (14) 式を時間微分すると

$$\dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

であり、運動方程式の (20) 式を代入して  $\ddot{\mathbf{q}}$  を消去すれば、 $\boldsymbol{\lambda}$  を系の状態を表す  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  を用いて表現することができる。

$$\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{A} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}^{\text{T}})^{-1} \left\{ \mathbf{A} \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{B} \mathbf{u} - \mathbf{F}_g) + \dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{q}} \right\} \quad (21)$$

したがって、(21) 式を (20) 式に代入すれば系の微分方程式は  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  で表現されるため、一般的な数値積分法<sup>17)</sup> により求解が可能となる<sup>3)</sup>。

## 3 制御系設計

### 3.1 制御変数

拘束条件は (7) 式は 2 本の非線形の代数方程式であるため、システムの自由度は  $6 - 2 = 4$  である。したがって、ボール・ビーム系においてパームサークルを実現するため、この自由度として次の制御変数を取る。

$$\mathbf{x}_c := \begin{bmatrix} {}^B \mathbf{p}_O \\ \alpha_F \\ \phi_F \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad (22)$$

一般化座標  $\mathbf{q}$  を、この (22) 式の制御変数を用いて表現することを考える。まず指先位置  ${}^B \mathbf{p}_F$  については、接触条件 (7) 式において、(8), (9), (4), (5) 式を用いれば、

$$\begin{aligned} {}^B \mathbf{p}_F &= {}^B \mathbf{p}_O - {}^B \mathbf{R}_F {}^F \mathbf{p}_{C_F} + {}^B \mathbf{R}_O {}^O \mathbf{p}_{C_O} \\ &= {}^B \mathbf{p}_O - {}^B \mathbf{R}_F {}^F \mathbf{p}_{C_F} - {}^B \mathbf{R}_F {}^O \mathbf{R}_{C_O}^{\text{T}} \mathbf{p}_{C_O} \\ &= {}^B \mathbf{p}_O - {}^B \mathbf{R}_F {}^F \mathbf{p}_O \end{aligned} \quad (23)$$

ただし

$${}^F \mathbf{p}_O = \begin{bmatrix} \alpha_F \\ r_O \end{bmatrix}$$

となり、制御変数  $\mathbf{x}_c$  を用いて表現できる。なお、 ${}^F \mathbf{p}_O \in \mathbb{R}^2$  は指先上での対象物位置を意味している。 $\phi_F$ ,  ${}^B \mathbf{p}_O$  は制御変数そのものであるため、次に対象物の姿勢角  $\phi_O$  について考える。姿勢角に関する関係 (11) 式より、

$$\phi_O = \phi_F - \alpha_O - \frac{\pi}{2}$$

である。ここで、対象物上の接触点を表す接触座標  $\alpha_O$  については、接触座標の転がり接触条件 (13) 式を積分して用いることで、

$$\phi_O = \phi_F - \frac{1}{r_O} \alpha_F + \frac{1}{r_O} \alpha_F(0) - \alpha_O(0) - \frac{\pi}{2} \quad (24)$$

の関係式を得る。なお、 $\alpha_F(0)$ ,  $\alpha_O(0)$  はそれぞれ  $\alpha_F$ ,  $\alpha_O$  の初期値である。

さらに、得られた一般化座標と制御変数の関係を用いて、速度レベルの関係式を求める。(23) 式を時間微分すると

$$\begin{aligned} {}^B \dot{\mathbf{p}}_F &= {}^B \dot{\mathbf{p}}_O - {}^B \dot{\mathbf{R}}_F {}^F \mathbf{p}_O - {}^B \mathbf{R}_F \dot{\mathbf{p}}_O \\ &= {}^B \dot{\mathbf{p}}_O - \mathbf{R}(\frac{\pi}{2}) {}^B \mathbf{R}_F {}^F \dot{\mathbf{p}}_O \phi_F - {}^B \mathbf{R}_F e_x \dot{\alpha}_F \end{aligned} \quad (25)$$

<sup>3)</sup>実際には数値積分の計算誤差が積算されることにより、拘束条件 (7), (13) 式にずれが生じることが考えられる。誤差が無視できないほど大きい場合は、バウムガルデの安定化法<sup>18)</sup> などを用いて計算誤差を補正する必要がある。

を得る。また、(24) 式を時間微分すれば以下を得る。

$$\dot{\phi}_O = \dot{\phi}_F - \frac{1}{r_O} \alpha_F \quad (26)$$

以上から、(25)、(26) 式をまとめれば、一般化座標の速度  $\dot{q}$  を制御変数の速度  $\dot{x}_c$  を用いて表現できる。

$$\dot{q} = S(x_c) \dot{x}_c \quad (27)$$

ただし

$$S := \begin{bmatrix} I_2 & -{}^B R_F e_x & -R(\frac{\pi}{2})^B R_F^F p_O \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 & 1 \\ I_2 & \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & -\frac{1}{r_O} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 4}$$

ここで、係数行列  $S$  の列ベクトルは拘束 (14) 式の係数行列  $A$  の零化空間を張っており、

$$AS = \mathbf{0} \quad (28)$$

が成り立つ。この (28) 式の証明は付録に示す。したがって、(27) 式を拘束 (14) 式に代入すると

$$AS \dot{x}_c = \mathbf{0}$$

であり、制御変数  $x_c$  は拘束を常に満たすように運動することが分かる。

### 3.2 制御変数に関する運動方程式

運動方程式の (20) 式を制御変数 (22) 式に関する運動方程式に変換する。(27) 式を時間微分すると

$$\dot{q} = \dot{S} \dot{x}_c + S \ddot{x}_c \quad (29)$$

である。(29) 式を (20) 式に代入して、左から  $S^T$  をかければ

$$S^T M S \ddot{x}_c + S^T M \dot{S} \dot{x}_c + S^T F_g = -S^T A^T \lambda + S^T B u$$

となり、(28) 式より拘束力が消去されて  $x_c$  に関する運動方程式が得られる。

$$M_c(x_c) \ddot{x}_c + C_c(x_c, \dot{x}_c) \dot{x}_c + F_{g_c}(x_c) = B_c(x_c) u \quad (30)$$

ただし

$$\begin{aligned} M_c &:= S^T M S, & C_c &:= S^T M \dot{S} \\ F_{g_c} &:= S^T F_g, & B_c &:= S^T B \end{aligned}$$

なお、これらの行列、ベクトルの成分の詳細は付録 C に示す。

### 3.3 線形化システム

制御系設計のため、(30) 式を状態量の原点  $(x_c, \dot{x}_c) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  の近傍で線形化する。したがって、状態量および入力量に関する 2 次以上の微小項は  $\mathbf{0}$  とする。また、回転行列に関しては三角関数を含むため、

$$R(\phi) \simeq \begin{bmatrix} 1 & -\phi \\ \phi & 1 \end{bmatrix} = I_2 + R(\frac{\pi}{2}) \phi \quad (31)$$

と近似されることに注意されたい。(31) 式の下で (30) 式を線形化すると次のようになる。

$$\bar{M}_c \ddot{x}_c + \bar{F}_{g_c}(x_c) = \bar{B}_c u \quad (32)$$

ここに

$$\begin{aligned} \bar{M}_c &:= \begin{bmatrix} \bar{m}_{c11} I_2 & \bar{m}_{c12} & \bar{m}_{c13} \\ \bar{m}_{c12}^T & \bar{m}_{c22} & \bar{m}_{c23} \\ \bar{m}_{c13}^T & \bar{m}_{c23} & \bar{m}_{c33} \end{bmatrix} \\ \bar{F}_{g_c} &:= \begin{bmatrix} (m_F + m_O) g e_y \\ -m_F g \phi_F \\ m_F g r_O \phi_F \end{bmatrix} \\ \bar{B}_c &:= \begin{bmatrix} I_2 & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ -e_x^T & 0 \\ r_O e_x^T & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ただし  $\bar{M}_c$  の成分は以下で定義される。

$$\begin{cases} \bar{m}_{c11} := m_F I_2 \\ \bar{m}_{c12} := -m_F e_x \\ \bar{m}_{c13} := m_F r_O e_x \\ \bar{m}_{c22} := m_F + \frac{1}{r_O^2} J_O \\ \bar{m}_{c23} := -(m_F r_O + \frac{1}{r_O} J_O) \\ \bar{m}_{c33} := m_F r_O^2 + J_F + J_O \end{cases}$$

さらに (32) 式を整理すれば

$$\bar{M}_c \ddot{x}_c + \bar{K}_c x_c + \bar{d}_{g_c} = \bar{B}_c u \quad (33)$$

ここに

$$\begin{aligned} \bar{K}_c &:= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 & -m_F g \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 & m_F g r_O \end{bmatrix} \\ \bar{d}_{g_c} &:= \begin{bmatrix} (m_F + m_O) g e_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。

### 3.4 重力補償付き LQ 最適サーボ

まず、(33) 式を状態方程式に変換する。(33) 式には重力に由来する定数項  $\bar{d}_{g_c} \in \mathbb{R}^4$  が存在するため、以下の重力補償を導入する。

$$u = \bar{u} + u_g \quad (34)$$

ただし

$$u_g := \begin{bmatrix} (m_F + m_O) g e_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

(34) 式を (33) 式に適用すれば、 $\bar{B}_c u_g = \bar{d}_{g_c}$  であることから、

$$\bar{M}_c \ddot{x}_c + \bar{K}_c x_c = \bar{B}_c \bar{u} \quad (35)$$

を得る。したがって、状態量を

$$x := \begin{bmatrix} x_c \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^8 \quad (36)$$

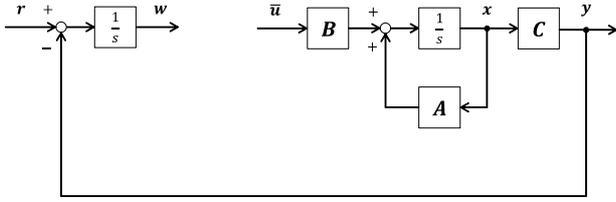


Fig. 7: The extended system with the linear one and the integrator.

として, (35) 式を変形すれば, 以下の線形システムを得る.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} \quad (37)$$

ここに

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{I}_{4 \times 4} \\ -\bar{\mathbf{M}}_c^{-1}\bar{\mathbf{K}}_c & \mathbf{0}_{4 \times 4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 3} \\ \bar{\mathbf{M}}_c^{-1}\bar{\mathbf{B}}_c \end{bmatrix}$$

さて, パームサークルとしては, 対象物位置  ${}^B\mathbf{p}_O$  についてレギュレーション, 指先上の対象物位置  $\alpha_F$  について周期軌道への軌道追従を行えば十分であり, 4 番目の制御変数である指先姿勢  $\phi_F$  については安定であれば良い. そこで, 出力変数として  ${}^B\mathbf{p}_O$ ,  $\alpha_F$  を取れば, 出力方程式は次のようになる.

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad \mathbf{C} := [\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{0}_{3 \times 5}] \quad (38)$$

この出力  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  に関して, 目標値  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  に対するサーボ系による制御器<sup>19)</sup>を設計する. サervo系による制御器とは, 制御器に次のような1つの積分器

$$\mathbf{w} = \int_0^t (\mathbf{r} - \mathbf{y}) dt \quad (39)$$

を持つことで目標値への追従性の改善を図るものである. 具体的には, Fig. 7 のように制御対象 (37), (38) 式に積分器を付加した拡大系について状態フィードバック則を設計することになる.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{A}_e\mathbf{x}_e + \mathbf{B}_e\bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_e\mathbf{x}_e \end{cases} \quad (40)$$

ただし

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_e &:= \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{11} \\ \mathbf{A}_e &:= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{8 \times 3} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{11 \times 11} \\ \mathbf{B}_e &:= \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{11 \times 3} \\ \mathbf{C}_e &:= [\mathbf{C} \quad \mathbf{0}_{3 \times 3}] \in \mathbb{R}^{3 \times 11} \end{aligned}$$

ただし, このような拡大系 (40) 式に対して安定化制御器が存在するためには, 次の行列が正則である必要がある<sup>4</sup>.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (41)$$

<sup>4</sup>系が原点に零点を持たないことを意味する.

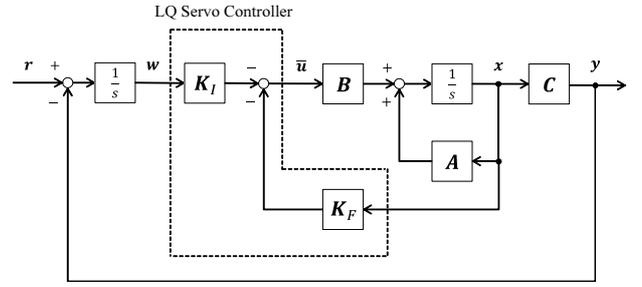


Fig. 8: The LQ servo controller based on the extended system.

この条件 (41) 式の下で, 次の最小化問題

$$\min_{\bar{\mathbf{u}}} J[\bar{\mathbf{u}}] \quad (42)$$

ここに

$$J := \int_0^\infty (\mathbf{x}_e^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_e + \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{u}}) dt, \quad \mathbf{Q} \geq 0, \mathbf{R} > 0$$

を解くことで, 最適 LQ サーボによる制御則を求める.

$$\bar{\mathbf{u}} = -[\mathbf{K}_F \quad \mathbf{K}_I] \mathbf{x}_e = -\mathbf{K}_F \mathbf{x} - \mathbf{K}_I \mathbf{w} \quad (43)$$

この制御則のブロック線図を Fig. 8 に示す.

以上から, (34), (39), (43) 式より, ボール・ビーム系におけるパームサークルを実現するための制御則は次の形式で与えられる.

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_F \mathbf{x} - \mathbf{K}_I \int_0^t (\mathbf{r} - \mathbf{y}) dt + \mathbf{u}_g \quad (44)$$

## 4 数値シミュレーション

### 4.1 シミュレーションの設定

数値シミュレーションにおける物理パラメータを以下に示す.

$$\begin{aligned} l_F &= 0.5 \text{ [m]}, \quad m_F = 0.5 \text{ [kg]}, \quad J_F = \frac{1}{12} m_F l_F^2 \text{ [kg}\cdot\text{m}^2] \\ r_O &= 0.05 \text{ [m]}, \quad m_O = 0.1 \text{ [kg]}, \quad J_O = \frac{1}{2} m_O r_O^2 \text{ [kg}\cdot\text{m}^2] \end{aligned}$$

初期値については, まず  ${}^B\mathbf{p}_F(0)$ ,  $\phi_F$ ,  $\alpha_F$ ,  $\alpha_O$  を設定する. 残りの  ${}^B\mathbf{p}_O$ ,  $\phi_O$  については (23), (24) 式を用いて決定することとする.

$${}^B\mathbf{p}_F(0) = [0, 0]^T \text{ [m]}, \quad \phi_F(0) = -5 \text{ [deg]}$$

$$\alpha_F = 0.1 \text{ [m]}, \quad \alpha_O = -90 \text{ [deg]}$$

この初期状態を Fig. 9 に図示する.

LQ 最適サーボ制御則については, 重み行列  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  を次のように設定する.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_v \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_p = \begin{bmatrix} 100 & & 0 \\ & 100 & \\ & & 100 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_v = \mathbf{I}_4, \quad \mathbf{Q}_y = 100\mathbf{I}_3$$

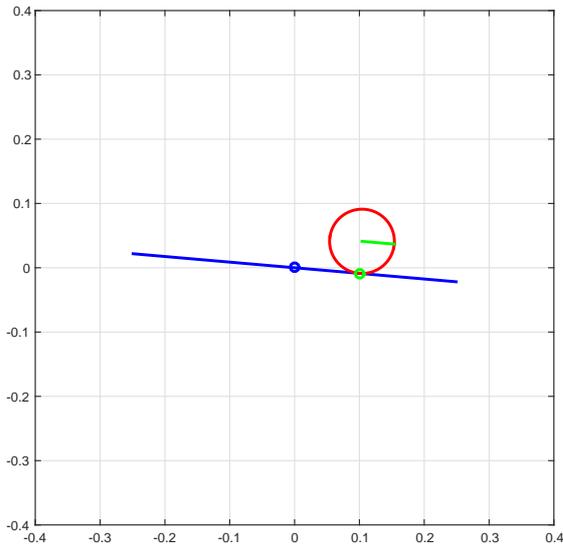


Fig. 9: The initial situation of the ball-beam system.

最後に、出力に対する目標値を以下のように設定する。

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ -A_{\alpha_F} \cos(2\pi f_{\alpha_F} t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

ここで、 $\alpha_F$  に対する軌道の振幅  $A_{\alpha_F}$  と周波数  $f_{\alpha_F}$  は次のようにする。

$$A_{\alpha_F} = 0.1 \text{ [m]}, \quad f_{\alpha_F} = 0.2 \text{ [Hz]}$$

#### 4.2 シミュレーション結果

シミュレーション結果を Figs. 10–13 に示す。シミュレーション時間は 20 [sec] とした。Figs. 10, 11 より、一般化座標  $\mathbf{q}$  および制御出力  $\mathbf{y}$  の全てが安定であることが分かる。Fig. 11 において赤い点線は目標値を示しており、対象物位置  ${}^B\mathbf{p}_O$  のうち、 $y$  座標については原点に収束している一方、 $x$  座標については原点近傍に収束しているが周期的な挙動が残っている。これは指先上の対象物位置  $\alpha_F$  に対して周期軌道を与えている影響と思われる。また、指先上の対象物位置  $\alpha_F$  については、周期目標軌道への追従性があまり良いとは言えず、振幅、位相ともに定常的な誤差が残っている。LQ 最適サーボ系による制御則では、原理的に消去可能であるのはステップ状の目標値に対する誤差のみあるため、このような大きめの誤差が生じている。Fig. 12 は制御入力を示しており、システムの物理パラメータから、過大でない妥当な入力の範囲内であることが見て取れる。Fig. 13 は指先と対象物の接触点に生じる接触力を指先の接触座標系  $\Sigma_{C_F}$  で表現したものであり、以下で与えられる。

$${}^{C_F}\mathbf{f}_C = {}^F\mathbf{R}_{C_F}^T {}^B\mathbf{R}_F^T \boldsymbol{\lambda} \quad (45)$$

図から分かるように、垂直抗力である  $y$  成分が常に正であることから、指先と対象物は常に接触状態にあり物理的に矛盾しない挙動の範囲内において制御が行われていることが分かる。

次に、制御則 (43) 式を改良することで、制御性能の改善を図る。以下のように、状態フィードバック部を目標値からの偏差に関するものに変更する。

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_F(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) - \int_0^t (\mathbf{r} - \mathbf{y})dt + \mathbf{u}_g \quad (46)$$

ただし

$$\mathbf{x}_d := \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} \end{bmatrix}$$

新たな制御則 (46) 式を適用したシミュレーション結果を Figs. 14–17 に示す。まず図より、安定であることが分かり、応答の様子についても全体的に元の制御則と同様であることが見て取れる。大きな違いとしては、Fig. 15 から分かるように、指先上の対象物位置  $\alpha_F$  の周期軌道への追従性が大きく改善されている点である。振幅についてはわずかながら誤差が残っているが、位相についてはほぼ誤差はないと言って良い。対象物位置  ${}^B\mathbf{p}_O$  の  $x$  座標についても、わずかではあるが振動的な振る舞いの振幅が収まっていることも見て取れる。このシミュレーション結果のアニメーションのスナップショットを Fig. 18 に示す。8 秒程度で対象物の空間の原点へのレギュレーションが達成され、その後は指先上の対象物位置を周期軌道に追従させながら、空間内の対象物位置を原点に保っている様子が見て取れる。

## 5 おわりに

本研究では、人間の巧みさを表すタスクであるコンタクトジャグリングでの代表的なトリックのパームサークルを実現することを目指して、最初のステップとして、ボール・ビーム系におけるパームサークルを達成する制御系設計を行った。まず、ボール・ビーム系を拘束条件付きの運動方程式として定式化し、転がり接触を保つために必要な拘束力を含んだ形式でモデリングを行った。これにより、拘束力を消去しない、より物理現象に近いモデルに対して制御則を検証することが可能である。制御系設計においては、まず、パームサークルを達成するために適切な制御変数の選定、および一般化座標との関係式を導出した。この関係式を用いることで、制御変数に関する運動方程式を導いた。制御変数に関する運動方程式では、拘束力が消去されており、制御系設計に適した形式となっている。得られた新たな運動方程式を原点近傍で線形化することで、線形システムに導出し、重力補償付き LQ 最適サーボ制御器を設計した。最後に、制御則の有効性を数値シミュレーションにより検証した。制御則は概ね良好な性能を示したが、周期軌道への追従性については良いパフォーマンスを示さなかったため、状態フィードバック部を目標値からの偏差に変更することで改善を図ることができた。

今後の課題についていくつか述べる。本研究で扱った系は 2 次元空間でのボール・ビーム系であるため、今回の知見を、3 次元空間におけるボール・プレート系へ拡張することが挙げられる。今回のアプローチはある種古典的な制御問題としてパームサークルを取り扱っ

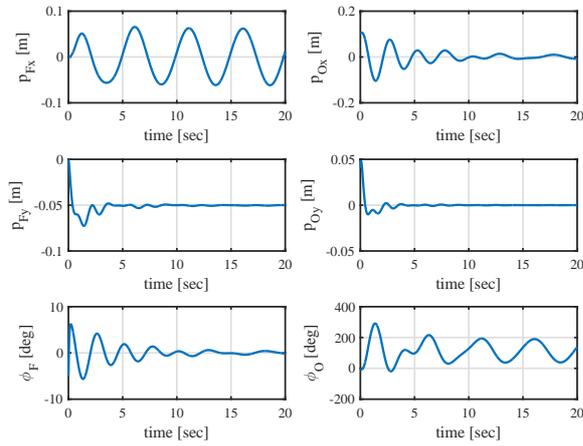


Fig. 10: Simulation result: Finger & object.

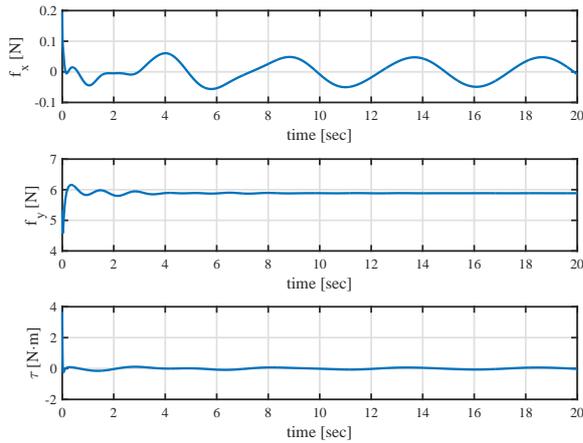


Fig. 12: Simulation result: Ctrl. inputs.

ているが、人間の巧みさを発現するメカニズムとしては、系の動特性に本質的に内在する性質が大いに関係していると言われていた<sup>20)</sup>。また、一部のみのある種の目的関数を安定化することで内部ダイナミクスが発生し、結果的に巧みな動作が達成されるという報告もある<sup>21, 22)</sup>。特に内部ダイナミクスは劣駆動機械に対して生じるゼロダイナミクスであり、本研究が対象とする系に非常に深い関わりがあると思われる。これらの知見に基づいた新たな技巧的動作を発現する制御則を求めることが、本研究の大きな道筋であると思われる。

## 謝辞

本研究は2015年度南山大学パッへ研究奨励金 I-A-2の助成を受けた。ここに謝辞を程す。

## 参考文献

- 1) T. Yoshikawa. Dexterous mechanical hand. *Trans. RSJ*, Vol. 18, No. 6, pp. 763–766, 2000. (in japanese).
- 2) A. Nakashima, Y. Sugiyama, and Y. Hayakawa. Paddle juggling of one ball by robot manipulator with visual servo. In *9th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, 2006. ICARCV '06*, pp. 1–6, 2006.
- 3) 木崎昂裕, 並木明夫, 脇屋慎一, 石川正俊, 野波健蔵. 高速多指ハンドアームと高速ビジョンを用いたボールジャグリングシステム. *日本ロボット学会誌*, Vol. 30, No. 9, pp. 924–931, 2012.
- 4) Chunfang Liu, Yoshikazu Hayakawa, and Akira Nakashima. Racket control for a table tennis robot

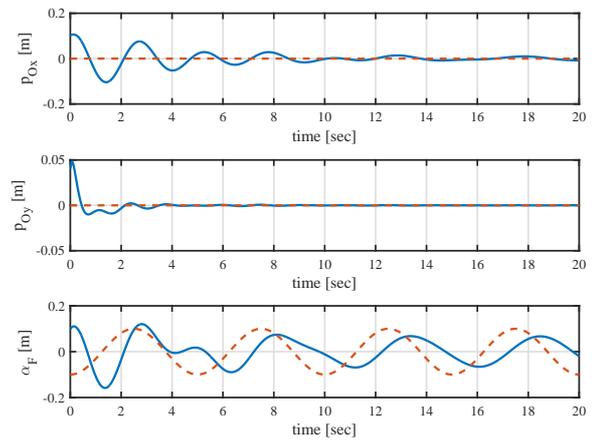


Fig. 11: Simulation result: Ctrl variables

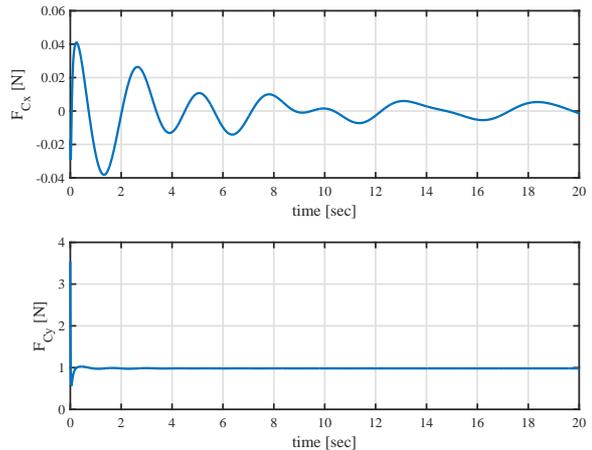


Fig. 13: Simulation result: Cotact forces.

to return a ball. *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, Vol. 6, No. 4, pp. 259–266, 2013.

- 5) M.T. Mason and K.M. Lynch. Dynamic manipulation. In *Proc. IEEE/RSJ IROS*, Vol. 1, pp. 152–159, 1993.
- 6) 美多勉. 非線形制御入門—劣駆動ロボットの技能制御論. 昭晃堂, 2000.
- 7) 堀部貴雅, 坂本登. Optimal trajectory design for nonlinear mechanical systems : Acrobot example. システム制御情報学会研究発表講演会講演論文集, Vol. 59, p. 4p, may 2015.
- 8) 浅井徹. 大学院での制御教育. 計測と制御, Vol. 46, No. 9, pp. 713–716, 2007.
- 9) T. Ibuki, Y. Tadokoro, Y. Fujita, and M. Sampei. 3d inverted pendulum stabilization on a quadrotor via bilinear system approximations. In *Control Applications (CCA), 2015 IEEE Conference on*, pp. 513–518, Sept 2015.
- 10) 荒井裕彦, 谷江和雄, 城間直司. 非駆動関節を有する水平3軸マニピュレータの非ホロノミック拘束下におけるフィードバック制御. *日本ロボット学会誌*, Vol. 15, No. 6, pp. 943–952, 1997.
- 11) 中村仁彦. 非ホロノミックロボットシステム—第1回非ホロノミックロボットって何?—. *日本ロボット学会誌*, Vol. 11, No. 4, pp. 521–528, 1993.
- 12) R. W. Brockett. Asymptotic stability and feedback stabilization. In R. W. Brockett, R. Millman, and H. Sussman, editors, *Differential Geometric Control Theory: Progress in Mathematics*, Vol. 27, pp. 181–208. Springer-Verlag, 1983.

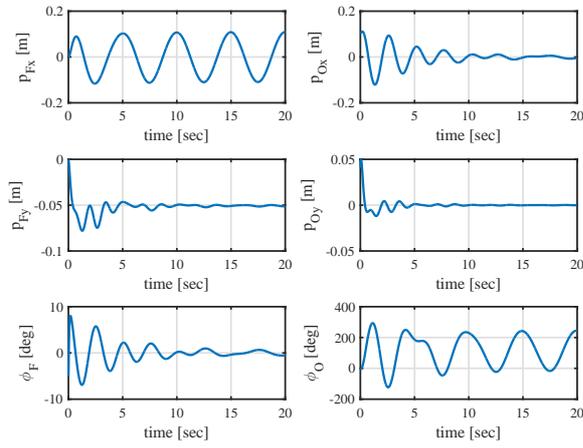


Fig. 14: Simulation result(modified): Finger & object

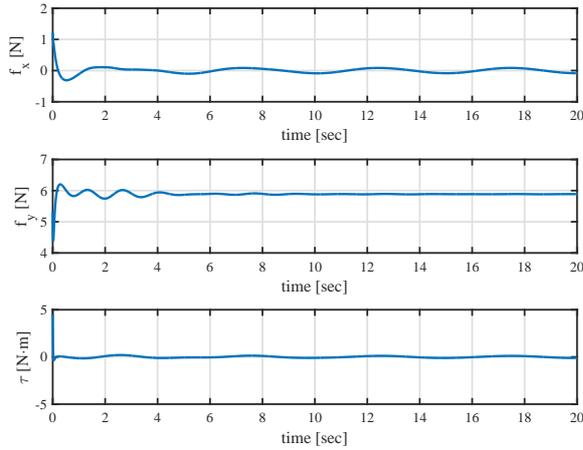


Fig. 16: Simulation result(modified): Ctrl. inputs.

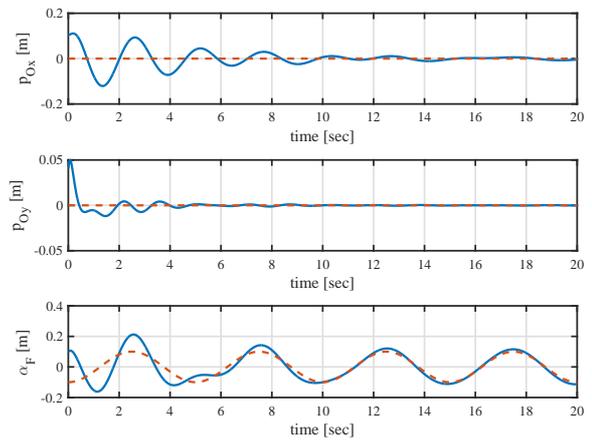


Fig. 15: Simulation result(modified): Ctrl. variables

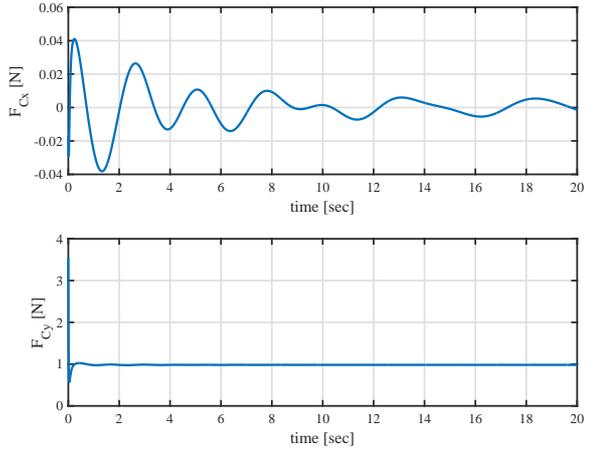


Fig. 17: Simulation result(modified): Cotact forces.

- 13) James Ernest. *Contact Juggling*. 3rd edition, 2011.
- 14) K. M. Lynch, N. Shiroma, H. Arai, and K. Tanie. The roles of shape and motion in dynamic manipulation: the butterfly example. In *Proceedings. 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Vol. 3, pp. 1958–1963, 1998.
- 15) 平田光男. *Arduino と MATLAB で制御系設計をはじめよう!* Physical computing lab. TechShare, 2012.
- 16) R. M. Murray, Z. Li, and S. S. Sastry. *A Mathematical Introduction to ROBOTIC MANIPULATION*. CRC Press, New York, U.S.A., 1994.
- 17) 日本機械学会. *数値積分法の基礎と応用*. コロナ社, 東京, Japan, 7月 2003.
- 18) 日本機械学会. *マルチボディダイナミクス (1) —基礎理論—*. コロナ社, 東京, Japan, 4月 2006.
- 19) 健蔵野波, 秀和西村. *MATLAB による制御理論の基礎*. 東京電機大学出版局, 2001.
- 20) 一浅間. *移動知: 適応行動生成のメカニズム*. Mobili-gence. オーム社, 東京, Japan, 2010.
- 21) S. Katsumata, S. Ichinose, T. Shoji, S. Nakaura, and M. Sampei. Throwing motion control based on output zeroing utilizing 2-link underactuated arm. In *Proc. of American Control Conference*, pp. 3057–3064, 2009.
- 22) Leonid Freidovich, Anders Robertsson, Anton Shiriaev, and Rolf Johansson. Periodic motions of the pendubot via virtual holonomic constraints: Theory and experiments. *Automatica*, Vol. 44, No. 3, pp. 785–791, 2008.

## A 回転行列の性質

2次元空間での回転行列  $\mathbf{R}(\phi) \in \text{SO}(2)$ ,  $\phi \in \mathbb{R}$  の性質を以下にまとめる. 証明は簡単であるため省略する.

$$\mathbf{R}^{-1}(\phi) = \mathbf{R}^T(\phi) = \mathbf{R}(-\phi) \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{R}(\phi_1 + \phi_2) = \mathbf{R}(\phi_1)\mathbf{R}(\phi_2) = \mathbf{R}(\phi_2)\mathbf{R}(\phi_1) \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{R}(\phi) = \mathbf{R}\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{R}(\phi)\dot{\phi} \quad (\text{A.3})$$

## B 関係 (28) 式の証明

表記の簡単化のため, (27) 式の  $\mathbf{S}$  を以下のように分割する.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_F \\ -\mathbf{S}_O \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_F \in \mathbb{R}^{3 \times 6}, \quad \mathbf{S}_O \in \mathbb{R}^{3 \times 6} \quad (\text{B.1})$$

(28) 式の左辺を計算すると

$$\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{A}_F\mathbf{S}_F - \mathbf{A}_O\mathbf{S}_O \quad (\text{B.2})$$

ここで

$$\mathbf{A}_F\mathbf{S}_F = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & -{}^B\mathbf{R}_F\mathbf{e}_x & \mathbf{R}\left(\frac{\pi}{2}\right)^B\mathbf{R}_F \left( {}^F\mathbf{p}_{C_F} - {}^F\mathbf{p}_O \right) \\ \mathbf{A}_O\mathbf{S}_O = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & -\frac{1}{r_O}\mathbf{R}\left(\frac{\pi}{2}\right)^B\mathbf{R}_O^O\mathbf{p}_{C_O} & \mathbf{R}\left(\frac{\pi}{2}\right)^B\mathbf{R}_O^O\mathbf{p}_{C_O} \end{bmatrix}$$

である. (B.2) 式の各ブロック要素を計算すると, まず, 最初のブロック要素は明らかに  $\mathbf{0}_{2 \times 2}$  である. ま

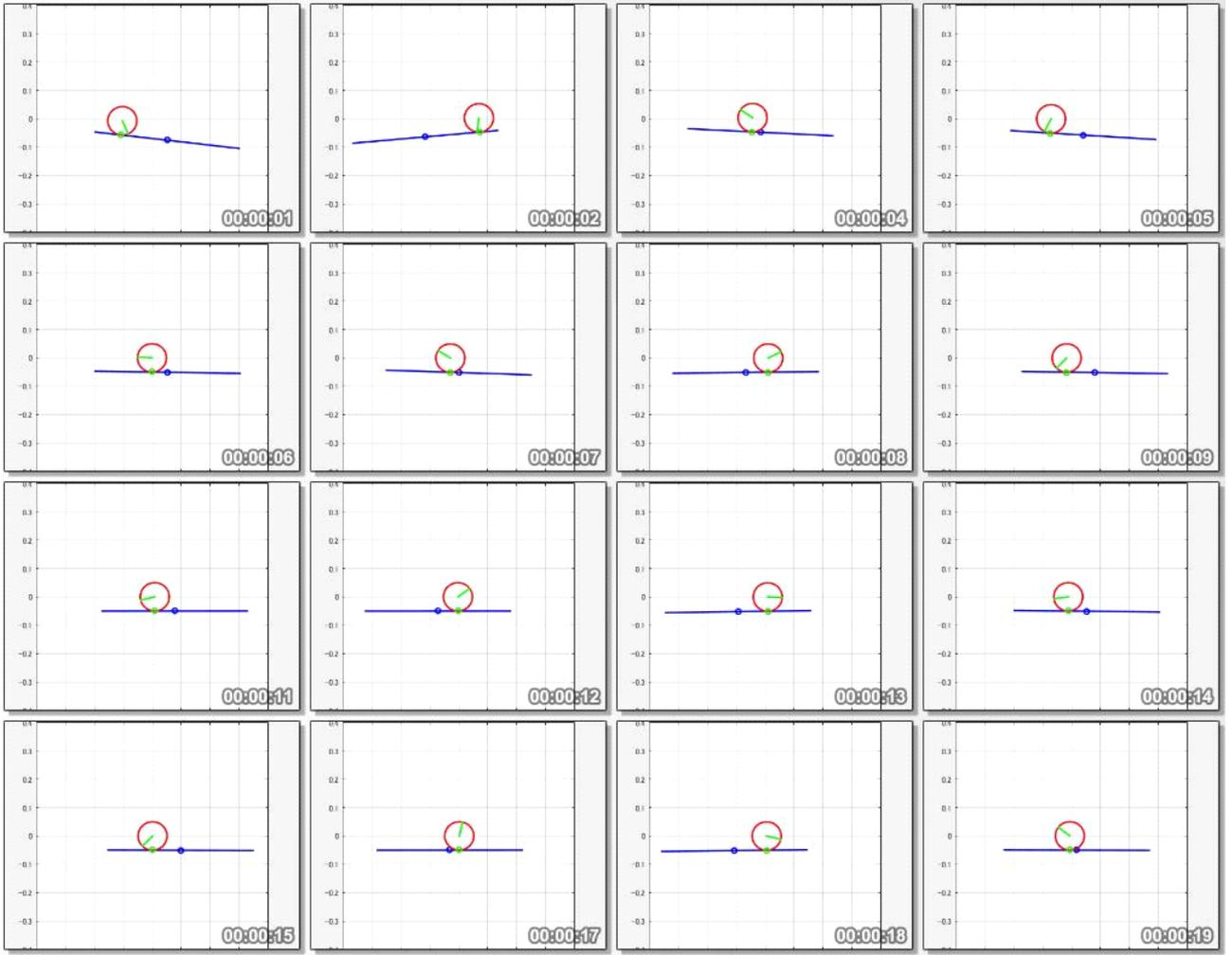


Fig. 18: Simulation result(modified): Snapshots of the animation.

た, (8), (9) 式より,

$${}^B \mathbf{R}_O^O \mathbf{p}_{C_O} = -{}^B \mathbf{R}_F^O \mathbf{R}_{C_O}^T \mathbf{p}_{C_O} = -r_O {}^B \mathbf{R}_F \mathbf{e}_y$$

となるため, 第2, 3のブロック要素の引き算について計算すると

$$\begin{aligned} & -{}^B \mathbf{R}_F \mathbf{e}_x - \left( -\frac{1}{r_O} \mathbf{R}(\frac{\pi}{2})^B \mathbf{R}_O^O \mathbf{p}_{C_O} \right) \\ &= -{}^B \mathbf{R}_F \mathbf{e}_x - \mathbf{R}(\frac{\pi}{2})^B \mathbf{R}_F \mathbf{e}_y \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}(\frac{\pi}{2})^B \mathbf{R}_F ({}^F \mathbf{p}_{C_F} - {}^F \mathbf{p}_O) - \mathbf{R}(\frac{\pi}{2})^B \mathbf{R}_O^O \mathbf{p}_{C_O} \\ &= \mathbf{R}(\frac{\pi}{2})^B \mathbf{R}_F ({}^F \mathbf{p}_{C_F} - {}^F \mathbf{p}_O + r_O {}^B \mathbf{e}_y) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

となり, (B.2) 式の右辺が  $\mathbf{0}$  となる. よって (28) 式が成り立つ.

### C 制御変数の運動方程式の (30) 式の各成分

制御変数の運動方程式の (30) 式の各成分を計算する. ここでは, 計算の概略と結果のみを示す. 行列  $\mathbf{S}$  について (B.2) 式の分割を用いると,  $\mathbf{M}_c$ ,  $\mathbf{C}_c$ ,  $\mathbf{F}_{g_c}$ ,  $\mathbf{B}_c$  は

次のように展開される.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_c &= \mathbf{S}_F^T \mathbf{M}_F \mathbf{S}_F + \mathbf{S}_O^T \mathbf{M}_O \mathbf{S}_O \\ \mathbf{C}_c &= \mathbf{S}_F^T \mathbf{M}_F \dot{\mathbf{S}}_F \\ \mathbf{F}_{g_c} &= \mathbf{S}_F^T \mathbf{F}_{g_F} + \mathbf{S}_O^T \mathbf{F}_{g_O} \\ \mathbf{B}_c &= \mathbf{S}_F^T \end{aligned}$$

これを元に成分を展開すれば, 以下のようになる.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_c &= \begin{bmatrix} m_{c11} & m_{c12} & m_{c13} \\ m_{c12}^T & m_{c22} & m_{c23} \\ m_{c13}^T & m_{c23} & m_{c33} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & c_{c12} & c_{c13} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 & c_{c23} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & c_{c23} & c_{c33} \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_{g_c} &= \begin{bmatrix} (m_F + m_O) g \mathbf{e}_y \\ -m_F g \mathbf{e}_x^T \mathbf{R}_F^T \mathbf{e}_y \\ m_F g (r_O \mathbf{e}_x - \alpha_F \mathbf{e}_y)^T \mathbf{R}_F^T \mathbf{e}_y \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{B}}_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ -\mathbf{e}_x^T \mathbf{R}_F^T & 0 \\ \mathbf{e}_x^T (r_O \mathbf{e}_x - \alpha_F \mathbf{e}_y)^T & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ただし  $\mathbf{M}_c$ ,  $\mathbf{C}_c$  の成分は以下で定義される.

$$\begin{cases} \mathbf{m}_{c11} := (m_F + m_O)\mathbf{I}_2 \\ \mathbf{m}_{c12} := -m_F{}^B\mathbf{R}_F\mathbf{e}_x \\ \mathbf{m}_{c13} := m_F{}^B\mathbf{R}_F(r_O\mathbf{e}_x - \alpha_F\mathbf{e}_y) \\ m_{c22} := m_F + \frac{1}{r_O}J_O \\ m_{c23} := -(m_F r_O + \frac{1}{r_O}J_O) \\ m_{c33} := m_F r_O^2 + J_F + J_O \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{c}_{c12} := -m_F\dot{\phi}_F{}^B\mathbf{R}_F\mathbf{e}_y \\ \mathbf{c}_{c13} := m_F{}^B\mathbf{R}_F\left\{\alpha_F\dot{\phi}_F\mathbf{e}_x + (r_O\dot{\phi}_F - \dot{\alpha}_F)\mathbf{e}_y\right\} \\ c_{c23} := -m_F\alpha_F\dot{\phi}_F \\ c_{c33} := m_F\alpha_F\dot{\alpha}_F \end{cases}$$