成立しない逆命題から成立する同値命題を作る考え方とその考察

藤城佳高 (南山大学大学院理工学研究科)
佐々木克巳 (南山大学理工学部)
e-mail: sasaki@nanzan-u.ac.jp

概要　逆命題は，もとの命題の仮定の 1 つと結論を入れかえた命題である．もとの命題は成立するものとして，本稿では，逆命題が成立しない場合に，もとの命題の仮定を結論と同値になるまで弱めるという考え方を考察し，数学教育におけるその考え方のよさを 2 つ挙げる．具体的には，不要な仮定を見つけられることと，2 つの三角形における条件

対応する, 2 組の辺とその間にない 1 組の角がそれぞれ等しい　　(SSK)

の理解を深められることの 2 つのよさを示す．後者のよさは，フィンランドの数学教育で扱われている三角形の合同条件に関係することも示す．

1　はじめに

本稿では，逆命題が成立しない場合に，もとの命題の仮定を結論と同値になるまで弱めるという考え方を考察し，数学教育におけるその考え方のよさを 2 つ挙げる．ここで，逆命題のもとになる命題は，

$$P_1, \cdots, P_n \Longrightarrow Q$$

の形のものとし，もちろん成立するものとする．この逆命題は複数存在するが，$P_1, \cdots, P_n$ のうちの 1 つ P_i を選ぶことで特定する．残りの仮定を Γ とおくと，その逆命題は

$$\Gamma, Q \Longrightarrow P_i$$

となる．この逆命題が成立すれば，同値性

$$\Gamma \Longrightarrow P \leftrightarrow Q$$

も成立する．本稿では，逆命題が成立しないときも，P を弱めて，同値性が成立するようにすることを考える．すなわち，

「$\Gamma \Longrightarrow P \vee P' \leftrightarrow Q$」が成立するような P' のうち P と対等なものを見つけること　　$(*)$

を考える．ただし，$P \vee P'$ は「P または P'」を表す．「対等である」は，同じ変数を対象とした述語であるという意味で用いた．[1]

逆命題が成立しない場合の上の考え方 $(*)$ の例を挙げよう．

例 1.1. 次の (正しい) 命題を考える．

[1]たとえば，述語 $x = y$ と対等な述語は，$x + y = 0$, $x \neq y$, $x = y \vee x = -y$ などである．

命題．$\triangle$ABC と $\triangle$EFG がある．このとき，$\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{E}$, BC=FG, $\angle\mathrm{C}=\angle\mathrm{G}$ ならば，AB=EF である．

仮定 $\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{E}$ を選択し P とおく．残りの仮定を Γ，結論 AB=EF を Q とおく．すると，もとの命題は，

$$\Gamma, P \Longrightarrow Q$$

であり，逆命題は，

$$\Gamma, Q \Longrightarrow P$$

となる．この逆命題は成立しない．詳細は 3 節で述べるが，その反例が図 1 の場合だけであることから，

$$\Gamma \Longrightarrow P \vee P' \leftrightarrow Q$$

を満たす P' で，P と対等なものは，

$$\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{E}=180^{\circ}$$

である．　$\dashv$

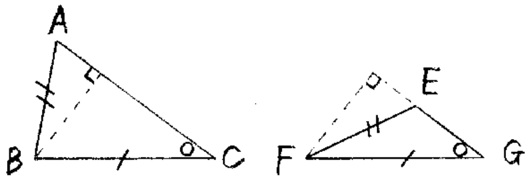


図 1: 例 1.1 の逆命題の反例

本稿の目的である，逆命題が成立しない場合の (∗) のよさとは，上の例では，

$$P' : \angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{E}=180^{\circ}$$

を見つけることのよさということになる．

本稿で挙げる 2 つのよさは，具体的には，次の 2 つである．

(1.1) 不要な仮定を見つけることができる

(1.2) 2 つの三角形において，条件

$$\text{対応する, 2 組の辺とその間にない 1 組の角がそれぞれ等しい} \tag{SSK}$$

の意味を深く理解できる

逆命題を考えることのよさは，たとえば，鈴木 [1] で述べられているが，(∗) により得られる上の 2 つのよさは，[1] で述べられたよさをより高めたものであると考える．2 つのよさの詳細を，それぞれ，次の 2 つの節で示す．なお，例 1.1 において，P' を見つけることのよさは，(1.2) に含まれる．詳細は 3 節でに示す．

2　不要な仮定を見つける

この節では，$(*)$ を考えることで，

(1.1) 不要な仮定を見つけることができる

ことのしくみと具体例を示す．

まず，しくみであるが，次の定理により導かれる．

定理 2.1. 命題 $P_1, P_2 \Longrightarrow Q$ は成立するが，逆命題 $P_2, Q \Longrightarrow P_1$ は不成立とする．このとき，P_2 を前提として，$\neg P_1$ の場合が常に反例であるならば，もとの命題を証明するのに，仮定 P_1 は不要である．

証明. $P_1, P_2 \Longrightarrow Q$ が成立すると仮定する．さらに，逆命題 $P_2, Q \Longrightarrow P_1$ は不成立で，P_2 を前提として，$\neg P_1$ の場合が常に反例である (つまり，$\neg P_1$ の場合は常に Q が成り立つ) とする．つまり，

$$\neg P_1, P_2 \Longrightarrow Q$$

が成立する．すると，もとの命題が成立するので，

$$P_1 \vee \neg P_1, P_2 \Longrightarrow Q$$

も成立する．ここで，排中律を用いると，

$$P_2 \Longrightarrow Q$$

を得る．すなわち，もとの命題を証明するのに，仮定 P_1 は不要である． $\dashv$

次に，具体例を示す．

例 2.2. 次の問題を考える．[2]

> 問題．△ABC の辺 BC の中点を M とし，点 B を通り辺 AC に平行な直線と直線 AM との交点を D とするとき，∠ACM= ∠DBM を示せ (図 2 参照)．

仮定

$$\mathrm{BM{=}CM}$$

を選択し，残りの仮定を Γ とする．もとの命題は，

$$\Gamma,\ \mathrm{BM{=}CM} \Longrightarrow \angle\mathrm{ACM}{=}\ \angle\mathrm{DBM}$$

である．逆命題は

$$\Gamma, \angle\mathrm{ACM}{=}\ \angle\mathrm{DBM} \Longrightarrow \mathrm{BM{=}CM}$$

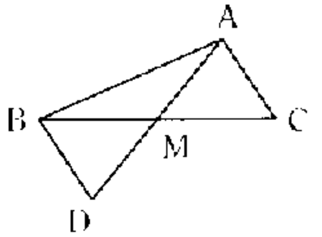


図 2: 例 2.2 の図

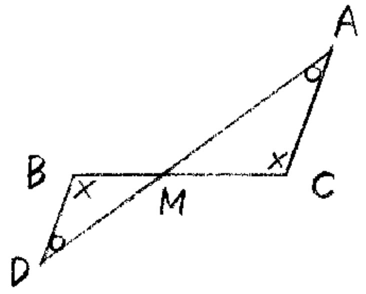


図 3: 例 2.2 の逆命題の反例

であり成立しない．反例は，BM $\neq$CM の場合のすべてで，たとえば，図 3 の場合である．

このことと定理 2.1 より，もとの命題において，結論 $\angle$ACM= $\angle$DBM を導くのに，仮定 BM=CM は不要である． ⊣

例 2.3. 次の問題を考える．[3]

> 問題．図 4 のように，$\angle$A=90° の直角二等辺三角形 ABC がある．$\angle$B の二等分線上に AD//BC となる点 D をとり，BD と AC の交点を P とする．また，A から辺 BC に垂線 AR を引き，AR と BD の交点を Q とする．このとき，AQ=AP を示せ．

仮定

$$\angle\text{ADB}=\angle\text{CBD} \quad (\text{すなわち，AD//BC})^{4}$$

を選択し，残りの仮定を Γ とする．逆命題は

$$\Gamma,\text{AQ}=\text{AP} \Longrightarrow \angle\text{ADB}=\angle\text{CBD}$$

であり成立しない．反例は，$\angle$ADB $\neq$ $\angle$CBD の場合のすべてで，たとえば，図 5 の場合である．

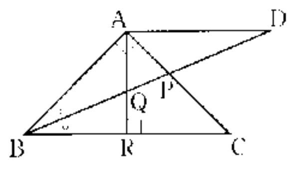


図 4: 例 2.3 の図

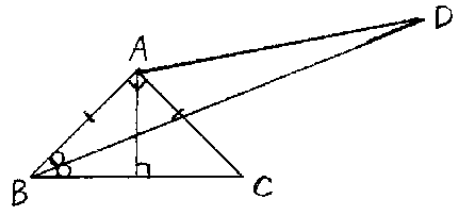


図 5: 例 2.3 の逆命題の反例

[2]この問題は，間宮・山腰 [2] の問題 98 の結論を変えたものである．
[3]この問題は，[2] の問題 103 の結論を変えたものである．
[4]図 4 の 4 点の位置関係により，この角度の条件と平行の条件は同値である．ここでは，この 2 条件を同一視して，Γ に平行の条件は含まれないとしている．

このことと定理 2.1 より，もとの命題において，結論 AQ=AP を導くのに，仮定 ∠ADB=∠CBD (すなわち，AD//BC) は不要である． ⊣

例 2.2 は，逆命題の考察を経なくても仮定が不要であることがわかるかも知れないが．例 2.3 ではそのことに気付きにくいと考える．

3　条件 (SSK) の意味

この節では，$(*)$ を考えることで，

(1.2) 2 つの三角形において，条件

対応する, 2 組の辺とその間にない 1 組の角がそれぞれ等しい　(SSK)

の意味を深く理解できる

ことのしくみと具体例を示す．

まず，しくみを示す．例 1.1 で示したとおり，三角形の合同条件を使う証明問題は，その逆命題の仮定が (SSK) となり，2 つの三角形の合同が保証されないことがある．そのような場合に $(*)$ を考えると，(SSK) が成立するときの 2 つの三角形の関係が，いくつかのパターンに分類されることがわかり，(SSK) と他の合同条件との関係を理解できる．

例 1.1 の逆命題を考えて，その過程を眺めてみよう．

例 1.1 の逆命題に対する $(*)$ の過程． 2 つの三角形 △ABC と △EFG において，その逆命題の仮定 (SSK)

$Q : \mathrm{AB} = \mathrm{EF}$,
$P_2 : \mathrm{BC} = \mathrm{FG}$,
$P_3 : \angle\mathrm{C} = \angle\mathrm{G}$

が成立すると仮定する．このとき，B から直線 AC におろした垂線の足を D，F から直線 EG におろした垂線の足を H とおくと，

- $\mathrm{D} \neq \mathrm{C} \Longrightarrow \triangle\mathrm{BCD} \equiv \triangle\mathrm{FGH}$,
- $\mathrm{BD} = \mathrm{FH}$,
- $\mathrm{D} \neq \mathrm{A} \Longrightarrow \triangle\mathrm{ABD} \equiv \triangle\mathrm{EFH}$

が成立する．よって，△ABC は，上で合同とわかった 2 組の三角形の位置関係と A=D か否かによって，図 6 の 3 つのパターンに分類して考えてよい．ただし，∠C が直角または鈍角のときは，図 6 のパターン 1 のみである．△EFG についても同様である．いずれの場合も，例 1.1 の述べた P' が

$$\Gamma \Longrightarrow P \vee P' \leftrightarrow Q,$$

を満たすこと，すなわち，

$$\Gamma \Longrightarrow \angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{E} \vee \angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{E} = 180^\circ \leftrightarrow Q,$$

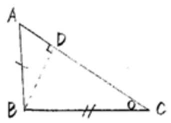
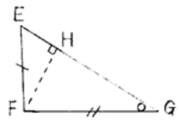
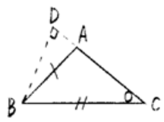
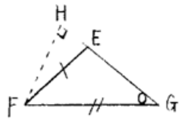
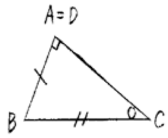
	△ABC	△EFG	∠Aと∠E
パターン 1			鋭角
パターン 2			鈍角
パターン 3			直角

図 6: 3 つのパターン

が成り立つことがわかる． ⊣

上の過程における図 6 から，△ABC と △EFG が同じパターンのときは，2 つの三角形は合同であるとわかる．このうちのパターン 3 同士のときは，(SSK) が直角三角形の合同条件になっている．また，パターン 1 同士，パターン 2 同士のときは，フィンランドの数学で教育している合同条件になっている．具体的には，次の条件 (SSK)* である．

$$\begin{array}{l}\text{対応する, 2 組の辺とその間にない 1 組の角がそれぞれ等しく,}\\ \text{その間にない残り 1 組の角が鋭角同士または鈍角同士である.}\end{array} \qquad \text{(SSK)*}$$

もとになるフィンランドの教科書 [3] の記述を図 7 に引用しておく．なお，パターン 1 同士で，∠C が (したがって，P_3 より ∠G も) 直角または鈍角のときは，残りの角が鋭角なので (SSK)* を満たしている．とくに，直角のときは直角三角形の合同条件も満たしている．

以上，上の (SSK) が成立するときの 2 つの三角形の関係が，いくつかのパターンに分類されることがわかり，(SSK) と他の合同条件との関係を理解できた．さらに，この合同条件との関連を理解することで，次のよさにつなげることができる．

(3.1) (SSK) が成立するときの，他の角の性質を理解できる．具体的には，例 1.1 の $P \vee P'$，すなわち，

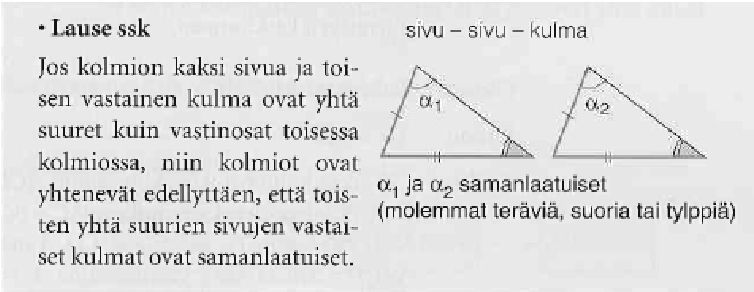
$$\angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{E} \text{ または } \angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{E} = 180^\circ$$

を理解できる．

(3.2) (SSK)* を用いる問題を具体的に作成できる．(SSK)* を本質的に使った問題は [3] にはあまり見られなかったことから，その問題の材料を得ることは有益と考える．

(3.3) 「(SSK) から 2 つの三角形の合同が導びかれる」への反例を挙げるしくみを理解できる．つまり，反例は，パターン 1 とパターン 2 の組み合せを考えれば挙げられることを理解できる．

(3.4) 場合分けの考え方の訓練になる．具体的には，パターン 1 からパターン 3 までの場合分け，垂線の足が頂点に一致するか否かの場合分けが必要であり，場合分けの考え方を育成できると考える．


• **Lause ssk**

Jos kolmion kaksi sivua ja toisen vastainen kulma ovat yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät edellyttäen, että toisten yhtä suurien sivujen vastaiset kulmat ovat samanlaatuiset.

図 7: (SSK)*

次に，具体例を示す．

例 3.1. 次の問題を考える．[5]

問題．△ABC の辺 BC の中点を M とし，点 B を通り辺 AC に平行な直線と直線 AM との交点を D とするとき，CA=BD を示せ (図 8 参照)．

条件 AC//BD を，

$$P\text{: } \angle\mathrm{CAD}{=}\angle\mathrm{BDA}$$

と「P の両辺の 2 角が錯覚の位置にある」に分離し，P を選択する．残りの仮定を Γ とおき（Γ には「P の両辺の 2 角が錯覚の位置にある」が含まれる），結論 CA=BD を

$$Q : \mathrm{CA{=}BD}$$

とおく．逆命題は

$$\Gamma, Q \Longrightarrow P$$

であり成立しない．反例は 1 つで，図 9 の場合である．この反例で，

$$P'{:}\angle\mathrm{CAD}{+}\angle\mathrm{BDA}{=}180^\circ$$

が成立することから，

$$\Gamma \Longrightarrow P \vee P' \leftrightarrow Q$$

を予想できる．もとの命題

$$\Gamma, P \Longrightarrow Q$$

は成立するので，

$$\Gamma, P' \Longrightarrow Q \tag{3.1.1}$$

[5] この問題は，[2] の問題 98 の結論を変えたものである．

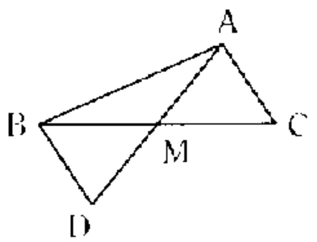


図 8: 例 3.1 の図

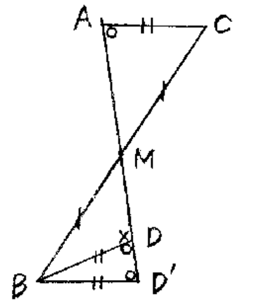


図 9: 例 3.1 の逆命題の反例

と

$$\Gamma, Q \Longrightarrow P \vee P' \tag{3.1.2}$$

を示せば十分であるが，ここでは，(3.1.2) の証明が重要である．(3.1.1) の証明は容易であり，省略する．
(3.1.2) の証明．B，C から直線 AM におろした垂線の足をそれぞれ，E，F とする．A=F または D=E のときは，∠CAD= ∠BDA=90° がいえるので，P と P' の両方が成り立つ．以後，A≠F,D≠E，すなわち，△CFA と △BED が存在するとする．BC と AD が垂直，すなわち，E=F=M のときは，Γ より，CF=BE である．そうでないときは，△CFM と △BEM が存在し，

$$\begin{array}{ll} \mathrm{CM{=}BM} & (\because \Gamma) \\ \angle\mathrm{CFM} = \angle\mathrm{BEM} = 90^\circ & (\because \text{E と F の定義}) \\ \angle\mathrm{CMF} = \angle\mathrm{BME} & (\because \text{対頂角}) \end{array}$$

だから，△CFM≡△BEM であり，CF=BE である．よって，△CFA と △BED において，

$$\begin{array}{ll} \mathrm{CF{=}BE} & \\ \angle\mathrm{CFA} = \angle\mathrm{BED} = 90^\circ & (\because \text{E と F の定義}) \\ \mathrm{CA{=}BD} & (\because Q) \end{array}$$

より，△CFA≡ △BED である．　⊣

次に，以下の 2 条件を考える．
(条件 1)A が，F と D の間にある．
(条件 2)D が，A と E の間にある．
すると，

$$(\text{条件 } 1) \Longrightarrow \angle\mathrm{CAF} + \angle\mathrm{CAD} = 180^\circ \tag{$*1$}$$

$$(\text{条件 } 1) \text{ の否定} \Longrightarrow \angle\mathrm{CAF} = \angle\mathrm{CAD} \tag{$*2$}$$

$$(\text{条件 } 2) \Longrightarrow \angle\mathrm{BDA} + \angle\mathrm{BDE} = 180^\circ \tag{$*3$}$$

$$(\text{条件 } 2) \text{ の否定} \Longrightarrow \angle\mathrm{BDA} = \angle\mathrm{BDE} \tag{$*4$}$$

がいえる．(条件 1)，(条件 2) の成立，不成立によって，場合分けをする．

(i) (条件 1) と (条件 2) が成立するとき：次のように，P を得る．

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{CAD} &= 180^\circ - \angle\mathrm{CAF} && (\because (\text{条件 }1), (*1))\\ &= 180^\circ\angle\mathrm{BDE} && (\because \triangle\mathrm{CFA} \equiv \triangle\mathrm{BED})\\ &= \angle\mathrm{BDA} && (\because (\text{条件 }2), (*3))\end{aligned}$$

(ii) (条件 1) が成立し，(条件 2) が成立しないとき：次のように，P' を得る．

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{CAD} &= 180^\circ - \angle\mathrm{CAF} && (\because (\text{条件 }1), (*1))\\ &= 180^\circ - \angle\mathrm{BDE} && (\because \triangle\mathrm{CFA} \equiv \triangle\mathrm{BED})\\ &= 180^\circ - \angle\mathrm{BDA} && (\because (\text{条件 }2)\text{ の否定}, (*4))\end{aligned}$$

(iii) (条件 1) が成立せず，(条件 2) が成立するとき：次のように，P' を得る．

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BDA} &= 180^\circ - \angle\mathrm{BDE} && (\because (\text{条件 }2), (*3))\\ &= 180^\circ - \angle\mathrm{CAF} && (\because \triangle\mathrm{CFA} \equiv \triangle\mathrm{BED})\\ &= 180^\circ - \angle\mathrm{CAD} && (\because (\text{条件 }1)\text{ の否定}, (*2))\end{aligned}$$

(iv) (条件 1) が成立せず，(条件 2) が成立しないとき：次のように，P を得る．

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{CAD} &= \angle\mathrm{CAF} && (\because (\text{条件 }1)\text{ の否定}, (*2))\\ &= \angle\mathrm{BDE} && (\because \triangle\mathrm{CFA} \equiv \triangle\mathrm{BED})\\ &= \angle\mathrm{BDA} && (\because (\text{条件 }2)\text{ の否定}, (*4))\end{aligned}$$

(i)～(iv) から，$P \vee P'$ を得る． $\dashv$

参考文献

[1] 鈴木誠：『中学校数学科における「逆」の問題づくりに関する研究』．日本数学教育学会誌，第 76 巻，第 7 号，pp. 3–10．

[2] 間宮勝己，山腰政喜：『最高水準特進問題集　数学中学 2 年』．文英堂，東京，2012．

[3] Markku Halmetoja，他 6 名：『MATEMATIIKAN TAITO 3』．WSOY，Helsinki，2006．