平行線，角の二等分線，二等辺三角形の関係を用いた証明問題の作成について

永井千尋（南山大学大学院理工学研究科）
佐々木克巳（南山大学理工学部）
e-mail: sasaki@nanzan-u.ac.jp

概要　本稿は，平行線，角の二等分線，二等辺三角形の関係に注目し，それを用いた証明問題を作成した結果を示す. より具体的には, 証明問題を作成するある手法を提案し, その手法に従って作成した証明問題(30 題)を紹介する．この関係を用いた証明問題が 30 題作成できたことから，異なる問題でその関係を用いる経験をさせることができ，問題解決において過去の経験を活かす指導につなげることができると考える.

1　はじめに

ポリア[2]では，問題解決の 1 つの手段として，過去に経験した似た問題の利用を挙げている．ここで，1 つの性質を用いた問題を複数個作成できると，異なる問題でその性質を用いる経験をさせることができ，問題解決において過去の経験を活かす指導，すなわち，最初に挙げたポリア[2]の手段を習得する指導に活かすことができる．その 1 つの性質の例として，中学校第二学年で学習する三角形の合同条件があり，その条件を用いた証明問題は多く知られている.

本稿では，平行線，角の二等分線，二等辺三角形の関係(以下の性質 1)に注目し，これを用いた証明問題をできるだけ多く作成することを考える．より具体的には，（性質 1 を用いて三角形の合同を証明する）問題を作成するためのある手法を提案し，その手法に従って作成した証明問題(30 題)を紹介する.

性質 1(平行線，角の二等分線，二等辺三角形の関係)．図 1 のように，直線ℓ上に 2 点 A,C，直線 m 上に 2 点 B,D がある．このとき，ℓと m が平行で，直線 BC が∠ABD の二等分線ならば，△ABC は AB=AC の二等辺三角形である.

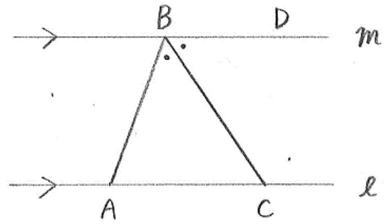

図 1　性質 1 の図

証明．ℓと m が平行であることと，錯覚の性質より，∠ACB=∠DBC である．さらに，直線 BC は∠ABD の二等分線であることより，∠DBC=∠ABC である．以上より，∠ACB=∠ABC であり, △ABC は AB=AC の二等辺三角形である.　■

次の 2 節で問題作成の手法を示す. その手法は 5 つの STEP からなる. 3 節で STEP4 までの手順で作成した問題を挙げ，4 節で STEP5 で作成した問題を示す.

2　問題作成の手法

この節では，本稿で用いる問題作成の手法を示す．この手法は，永井[1]で提案された手法をもとに作られている．[1]の手法は，三角形の合同を証明する問題を作成する手法で，4 つの STEP から構成されるが，本稿の方法は，[1]の方法を，性質 1 を用いる形に限定し，さらに，5 つ目の STEP を加えることで得られる．具体的には，以下のとおりである．

STEP1　合同な 2 つの三角形 T と T' を，T の 1 つの頂点 A と T' の 1 つの頂点 D が重なるように配置する．特に，次の条件を満たす配置を考える．

条件 1　T において A を端点とする辺 e と，T' において D を端点とする辺 e' が同一の直線上にある．

条件 1 を満たす配置は次の 3 つに分けて考える．
(i) e と e' が一致する．
(ii) e と e' のうち，片方がもう片方に含まれる．
(iii) (i),(ii)以外，すなわち，e と e' の共有点は A(=D)のみである．

STEP2　性質 1 を活用し，合同条件を導出できるよう次の操作を組み合わせて，新しい直線や線分，頂点を加える．
・2 頂点(端点)を結ぶ．
・延長線をひく．
・垂線をひく．
・平行線をひく．
・平行移動させる．
・対称移動させる．

STEP3　STEP2 で追加した直線や線分，頂点を用いて，T と T' の合同条件を導出する条件を表現する．この導出には，性質 1 と以下に示す性質リストの性質を用いる．

STEP4　STEP2 でできた図形と STEP3 の条件を踏まえ，T と T' が合同であることを証明する問題文をつくる．

STEP5　SETP4 でできた問題を比較することで，新しい問題をつくる．

性質リスト

性質 2(平行線の性質). 2 直線 ℓ, m が平行であるとき，点 P を，ℓ 上のどこにとっても，点 P と直線 m との距離は一定である.

性質 3(対頂角の性質). 対頂角は等しい.

性質 4(平行線の性質). 2 つの直線に 1 つの直線が交わるとき，次のことが成り立つ.

(a) 2 つの直線が平行ならば，同位角は等しい.

(b) 2 つの直線が平行ならば，錯角は等しい.

性質 5(平行になる条件). 2 つの直線に 1 つの直線が交わるとき, 次のことが成り立つ.

(a) 同位角が等しいならば，この 2 つの直線は平行である.

(b) 錯角が等しいならば，この 2 つの直線は平行である.

性質 6(二等辺三角形の定義). 2 つの辺が等しい三角形を二等辺三角形という.

性質 7(二等辺三角形の性質).

(a) 二等辺三角形の 2 つの底角は等しい.

(b) 二等辺三角形の頂角の二等分線は，底角を垂直に 2 等分する.

性質 8(二等辺三角形になる条件). 2 つの角が等しい三角形は，二等辺三角形である.

性質 9(平行四辺形の定義). 2 組の向かい合う辺が，それぞれ平行な四角形を平行四辺形という.

性質 10(平行四辺形の性質).

(a) 平行四辺形の 2 組の向かい合う辺は，それぞれ等しい.

(b) 平行四辺形の 2 組の向かい合う角は，それぞれ等しい.

(c) 平行四辺形の対角線は，それぞれの中点で交わる.

性質 11(平行四辺形になる条件). 四角形は，次の各場合に平行四辺形である.

(a) 2 組の向かい合う辺が，それぞれ平行であるとき (定義)

(b) 2 組の向かい合う辺が，それぞれ等しいとき

(c) 2 組の向かい合う角が，それぞれ等しいとき

(d) 対角線が，それぞれの中点で交わるとき

(e) 1 組の向かい合う辺が，等しくて平行であるとき

性質 12(長方形の定義). 4 つの角がすべて等しい四角形を，長方形という.

性質 13(正方形の定義). 4 つの辺がすべて等しく，4 つの角がすべて等しい四角形を，正方形という.

3 STEP4 までの手順で作成した問題

この節では，2 節の STEP4 までの手順で作成された問題(11 題)を示す．ただし，対象とする合同な 2 つの三角形は，3 辺の長さが異なる直角三角形に限定した．[1]でも同じ限定をしており，この節の 11 題は[1]でも示されている．以下では，その 11 題のう

ち，問題 1 は STEP1 から STEP4 を示すが，残り 10 題は，STEP1,STEP2 の図および作成された問題の仮定と結論のみを示す．

［問題 1］

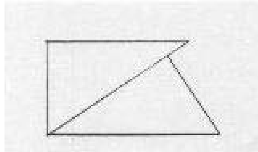

図 2　STEP1 の図

STEP1　図 2 のような配置の問題を考える．

STEP2　2 頂点を結び，e が斜辺の三角形の長辺の延長線ひき，短辺を平行移動させる．頂点や交点に記号をつけたものを図 3 とする．

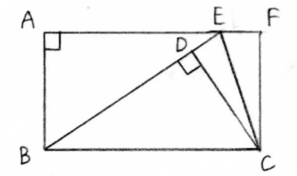

図 3　STEP2 の図

STEP3　△ABE と△DCB の合同条件を「直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しい」，すなわち，「∠BAE=∠CDB=90°,∠AEB=∠DBC,BE=CB」とする．このうち，∠AEB=∠DBC は，性質 3 を用いて，AF∥BC から導出できる．また，BE=CB は，性質 1 を用いて，AF∥BC,∠DEC=∠FEC から導出できる．

STEP4　STEP1~STEP3 を基に，問題をつくる．『図 3 のような∠A=90° かつ AF∥BC を満たす四角形 ABCF がある．∠DEC=∠FEC となるように辺 AF 上に点 E をとる．また，頂点 C から線分 BE に垂線をひき，交点を D とする．このとき，△ABE≡△CDB を証明せよ．』

［問題 2］STEP1 の配置を図 4 に示す．記号は STEP2 で定まる図 5 のように用いる．

仮定　AB∥DE,∠CDF=∠FDE,長方形 BEFC,∠A=90°

結論　△ABC≡△BDE

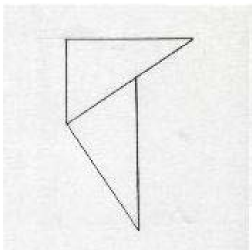

図 4　STEP1 の図

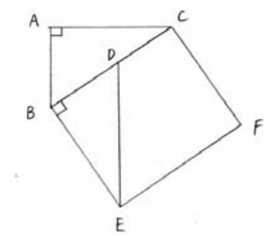

図 5　STEP2 の図

［問題 3］STEP1 の配置は[問題 2]と同じ図 4 である．記号は STEP2 で定まる図 6 のように用いる．

仮定　BC∥EF,EF=DC,線分 BF は∠F の二等分線,∠A=∠C=90°，BC⊥BE

結論　△ABC≡△BDE

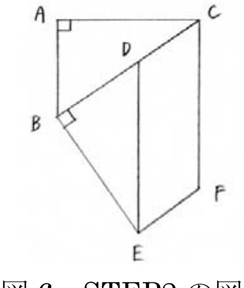

図 6　STEP2 の図

［問題 4］STEP1 の配置を図 7 に示す．記号は STEP2 で定まる図 8 のように用いる．

仮定　平行四辺形 ABFC,長方形 DBFG,
　　　∠BEF=∠GEF,∠ABC=90°

結論　△ABC≡△BDE

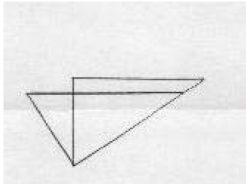

図 7　STEP1 の図

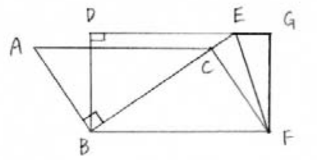

図 8　STEP2 の図

［問題 5］STEP1 の配置を図 9 に示す．記号は STEP2 で定まる図 10 のように用いる．

仮定　長方形 BFEC,∠ABC=∠DEF,
　　　∠BDF=∠EDF,∠A=90°

結論　△ABC≡△CDE

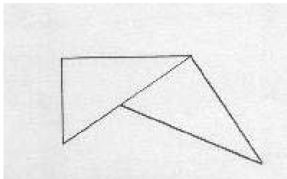

図 9　STEP1 の図

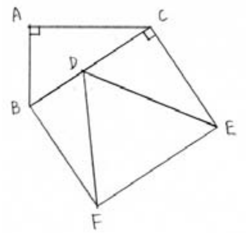

図 10　STEP2 の図

［問題 6］STEP1 の配置は[問題 5]と同じ図 9 である．記号は STEP2 で定まる図 11 のように用いる．

仮定　平行四辺形 ABCF,∠AFC=∠CDE,AB⊥AC,EC⊥BC,
　　　線分 FD は∠F の二等分線

結論　△ABC≡△CDE

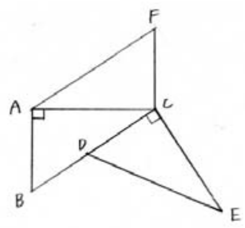

図 11　STEP2 の図

［問題 7］STEP1 の配置を図 12 に示す．記号は STEP2 で定まる図 13 のように用いる．

仮定　FD // BC,FD=BE,
　　　線分 FC は∠F の二等分線,∠C=90°,CA⊥FB

結論　△ABC≡△CED

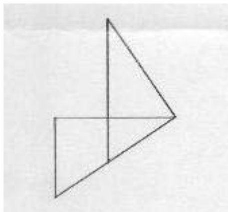

図 12　STEP1 の図

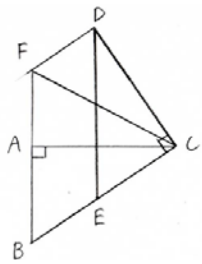

図 13　STEP2 の図

［問題 8］STEP1 の配置を図 14 に示す．記号は STEP2 で定まる図 15 のように用いる．

仮定　AF // DB,∠AFB=∠CAB,
　　　線分 AD は∠A の二等分線,AC⊥DB,DE⊥FB

結論　△ABC≡△BDE

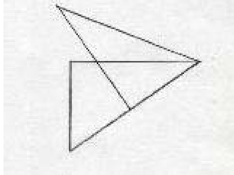

図 14　STEP1 の図

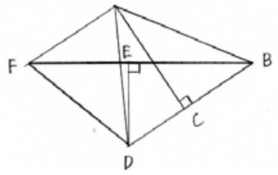

図 15　STEP2 の図

［問題 9］STEP1 の配置を図 16 に示す．記号は STEP2 で定まる図 17 のように用いる．

仮定　長方形 ABFE,∠CBG=∠CGB,
∠CGE=∠EGF,ED⊥CG

結論　△ABC≡△DEC

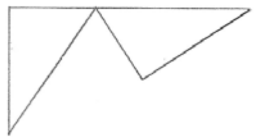
図 16　STEP1 の図

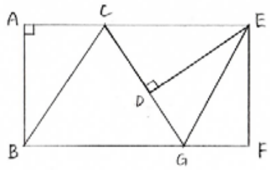

図 17　STEP2 の図

［問題 10］STEP1 の配置を図 18 に示す．記号は STEP2 で定まる図 19 のように用いる．

仮定　長方形 ABHE,BC=CG,CG // DE,
∠CGE=∠EGH,CD⊥DE

結論　△ABC≡△DCE

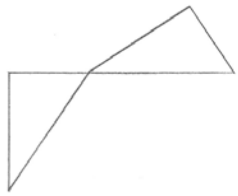
図 18　STEP1 の図

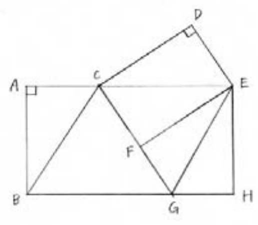

図 19　STEP2 の図

［問題 11］STEP1 の配置を図 20 に示す．記号は STEP2 で定まる図 21 のように用いる．

仮定　CB // EG,長方形 ABFE,
線分 CG は∠BGE の二等分線,
CD⊥GE

結論　△ABC≡△DCE

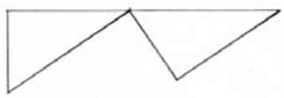
図 20　STEP1 の図

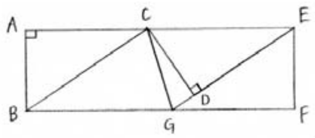

図 21　STEP2 の図

4　STEP5 の比較により作成した問題

この節では，STEP5，すなわち，3 節で示した問題を比較して新しい問題を作ることを行う．

まず，比較を行う．そのために，3 節の 11 題の図の配置を，性質 1 の二等辺三角形が同じ位置にくるようにして並べる．結果を図 22 に示す．

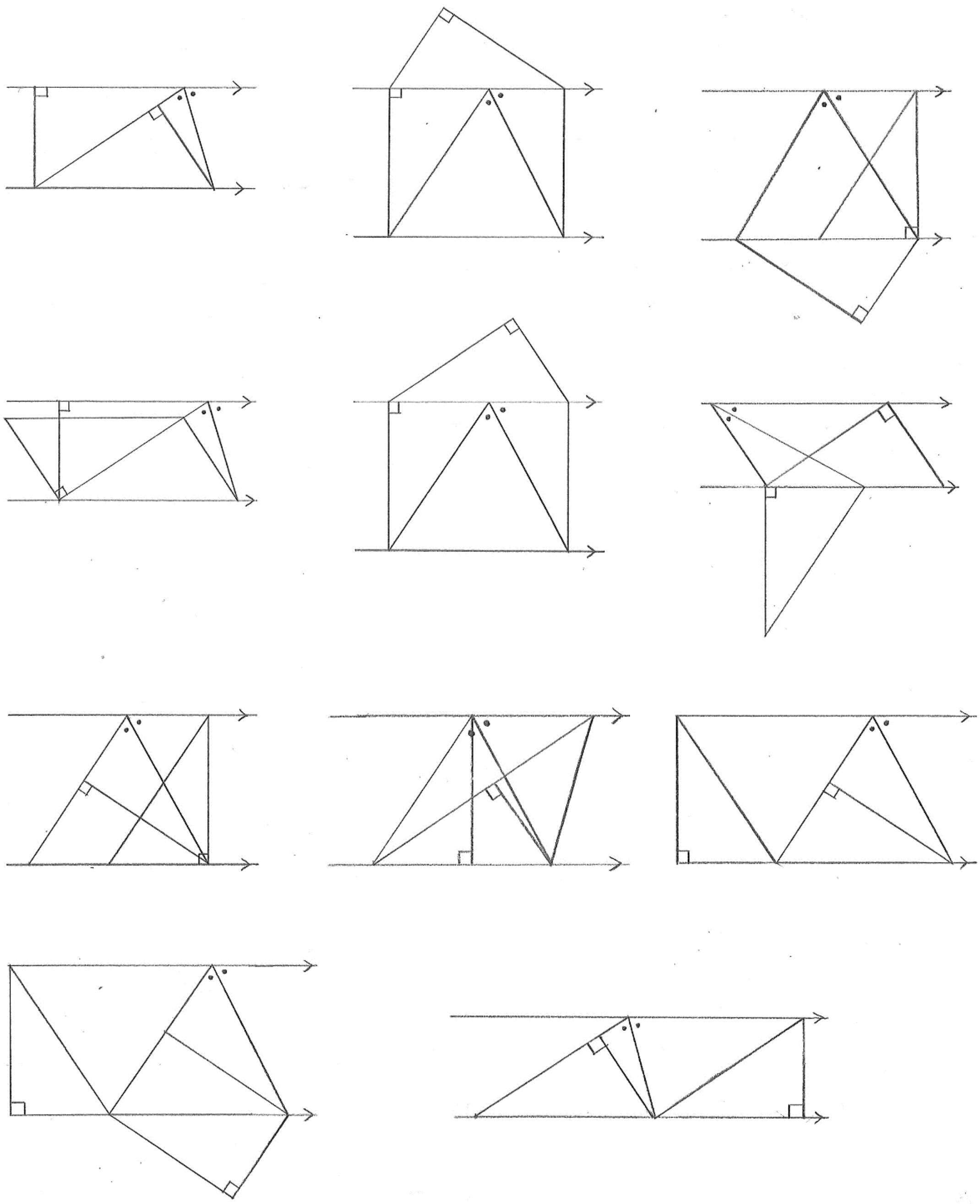

図 22　性質 1 の二等辺三角形が同じ位置・向きになるようにした図のリスト

図 22 の 11 個の比較から次の 2 つが読み取れる：

(1) 6 番目の図のみが，二等辺三角形の頂角が鈍角で，他の 10 個は鋭角である．

(2) 6 番目以外の 10 個は，同じ位置の直角三角形が複数の問題で対象となっている．たとえば，1 番目の図における左上の直角三角形は，斜辺でない 2 辺の位置の違いはあるが，2,4,5 番目にも現れる．

本稿では，上の(1),(2)を踏まえ，次の 2 つの方法で新しい問題を作成する．

(1) 合同な直角三角形の組み合わせを変える．たとえば，図 22 の 1 番目の左上と 10 番目の右下の直角三角形を合同な直角三角形とする問題を作る．

(2) 図 22 の二等辺三角形の頂角が鈍角なら鋭角の問題を作成し，鋭角なら鈍角の問題を作成する．

それぞれの結果を以下の 4.1 節と 4.2 節で述べる．

4.1　合同な三角形の組合せを変える

この節では，図 22 の 6 番目を除く 10 個の図の直角三角形の組み合わせを変えて作成した問題を示す．各問題では，仮定と結論のみを示す．

[問題 1] 図 23 のように記号を用いる．

仮定　AF // BE,∠BCE=∠FCE,∠BAC=90°，∠CBE=∠EBD,BD⊥ED

結論　△ABC≡△DEB

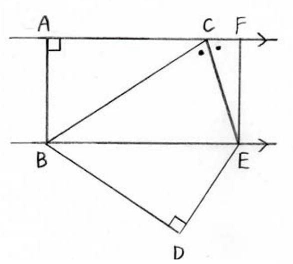

図 23　問題 1 の図

[問題 2] 図 24 のように記号を用いる．

仮定　AF // BE,∠BCE=∠FCE,∠BAF=90°,BG=GE, BD⊥DE

結論　△ABC≡△DBE

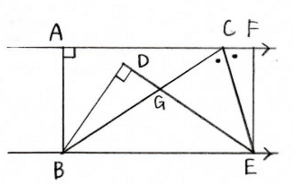

図 24　問題 2 の図

[問題 3] 図 25 のように記号を用いる.

仮定　長方形 DFCA, ∠AGC=∠CGF, AB // GF, DE // GF, AE⊥ED

結論　△ABC≡△ADE

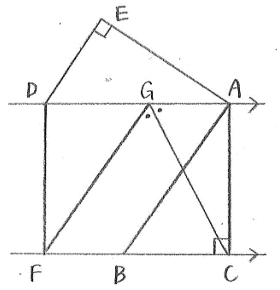

図 25　問題 3 の図

[問題 4] 図 26 のように記号を用いる.

仮定　GA // FC, ∠AGC=∠CGF, ∠ACB=90° ,GF // AB, ∠CDB=∠CBD, FD⊥DC, EF // DC, BF // DE

結論　△ABC≡△DEF

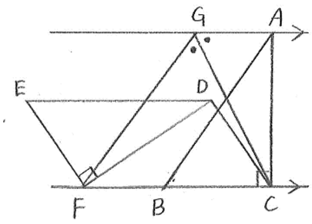

図 26　問題 4 の図

[問題 5] 図 27 のように記号を用いる.

仮定　長方形 DFCA, ∠AGC=∠CGF, AB // GF, GD=AE, ∠AED=90°

結論　△ABC≡△DAE

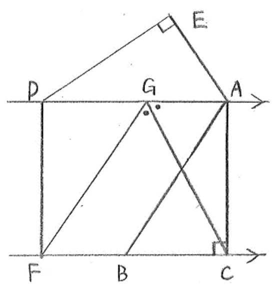

図 27　問題 5 の図

[問題 6] 図 28 のように記号を用いる.

仮定　AF // DC, ∠AFC=∠CFD, AB // FD, ∠FDC=∠DCE, ∠ACB=∠CED=90°

結論　△ABC≡△DCE

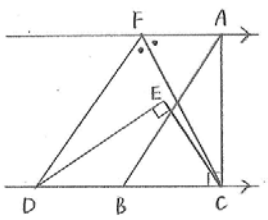

図 28　問題 6 の図

[問題 7] 図 29 のように記号を用いる.

仮定　AF // BD, ∠FAD=∠DAB, AC⊥BD, DE⊥AB

結論　△ABC≡△DBE

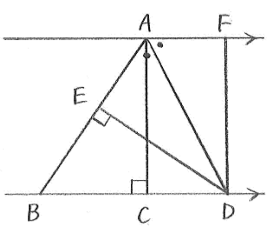

図 29　問題 7 の図

[問題 8] 図 30 のように記号を用いる.

仮定 AF // BD,∠FAD=∠DAB,AC⊥BD,DE // AB,DE⊥BE

結論 △ABC≡△BDE

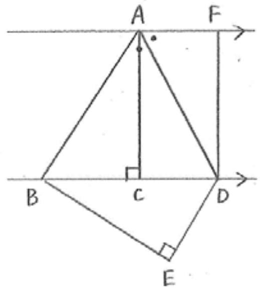

図 30　問題 8 の図

4.2　鋭角→鈍角，鈍角→鋭角

この節では，図 22 の二等辺三角形の頂角が鋭角なら鈍角に，鈍角なら鋭角に変えて作成した問題を示す．各問題では，仮定と結論のみを示す.

[問題 1] 図 31 のように記号を用いる.

仮定 AE // BC,∠AEC=∠CED,ED⊥CD,∠A=90°，
3 点 E,B,D は一直線上

結論 △ABE≡△DCB

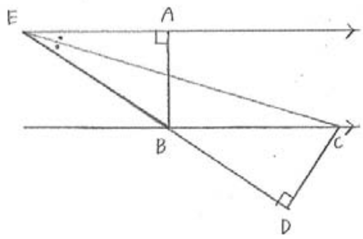

図 31　問題 1 の図

[問題 2] 図 32 のように記号を用いる.

仮定 AB // DE,長方形 BEFC,∠CDF=∠FDE,∠A=90°

結論 △ABC≡△BDE

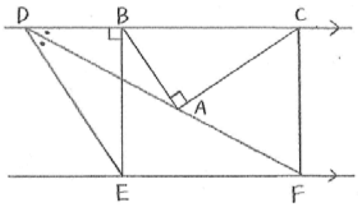

図 32　問題 2 の図

[問題 3] 図 33 のように記号を用いる.

仮定 BC // EF,EF=DC,線分 BF は∠F の二等分線,
∠A=∠ACF=90° ,BC⊥EC

結論 △ABC≡△CDE

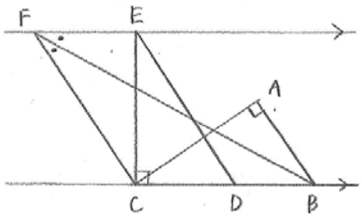

図 33　問題 3 の図

[問題 4] 図 34 のように記号を用いる.

仮定 平行四辺形 BACF,ED // BF,ED⊥BD,∠BEF=∠FED,
∠ABC=90° ,3 点 E,B,C は一直線上

結論 △ABC≡△BDE

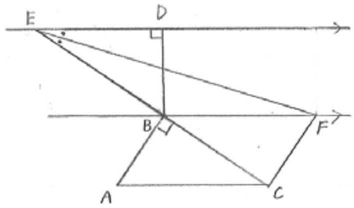

図 34　問題 4 の図

[問題 5] 図 35 のように記号を用いる.

仮定　長方形 CEFB,∠BDF=∠FDE,∠A=90°,∠ABC=∠DEF'

結論　△ABC≡△CDE

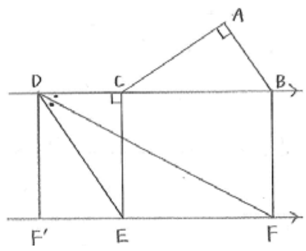

図 35　問題 5 の図

[問題 6] 図 36 のように記号を用いる.

仮定　平行四辺形 FCBA,∠AFC=∠CDE,AB⊥AC,EC⊥CD,
∠CFA=∠AFG

結論　△ABC≡△CDE

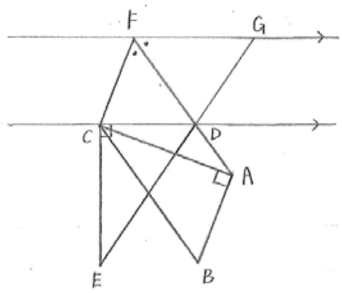

図 36　問題 6 の図

[問題 7] 図 37 のように記号を用いる.

仮定　FD // BC,FD=BE,線分 FC は∠F の二等分線,
∠DCE=90°,CA⊥FA,3 点 F,B,A は一直線上

結論　△ABC≡△GED

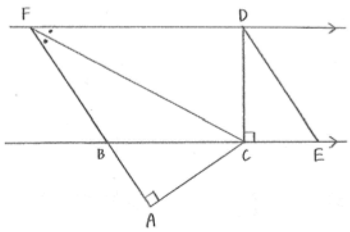

図 37　問題 7 の図

[問題 8] 図 38 のように記号を用いる.

仮定　AF // DB,∠AFB=∠CAB,線分 AD は∠FAB の二等分線,
AC⊥DB,DE⊥FB

結論　△ABC≡△BDE

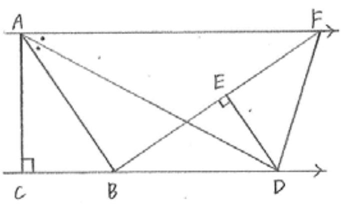

図 38　問題 8 の図

[問題 9] 図 39 のように記号を用いる.

仮定　長方形 GAEF,∠CBG=∠CGB,∠CGE=∠EGF,
ED⊥CG,3 点 G,C,D は一直線上

結論　△ABC≡△DEC

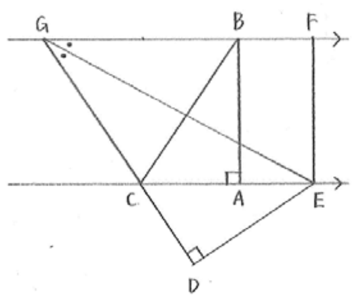

図 39　問題 9 の図

[問題 10] 図 40 のように記号を用いる.

仮定　長方形 BAEH,BC=CG,CG // DE,∠CGE=∠EGH,
CD⊥DE

結論　△ABC≡△DCE

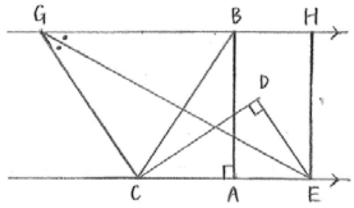

図 40　問題 10 の図

[問題 11] 図 41 のように記号を用いる.

仮定　CB // EG,長方形 FEAB,線分 CG は∠BGE の二等分線,
CD⊥GE,

結論　△ABC≡△DCE

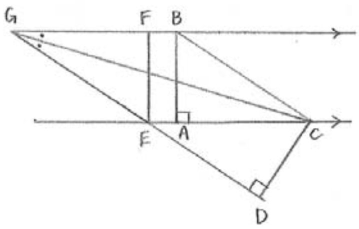

図 41　問題 11 の図

参考文献

[1]永井千尋,「中学校数学領域「図形」における問題づくりの数理的考察」, 南山大学大学院理工学研究科 2014 年度修士論文, 2015.

[2] G. ポリア著, 柿内 賢信訳,『いかにして問題をとくか』, 丸善, 東京, 1975.