

# ジブクレーンに対するディスクリプタ表現を用いたゲインスケジューリング制御

高見 勲, 石田 将一

Key Words : Jib Crane, Time-Varying Rope Length, Robust Control, Descriptor Form, Polytopic LPV

## 1 はじめに

ジブクレーンとは、動力によって荷を吊り上げ、これを水平方向に運搬することを目的とする機械装置である。本研究で用いる制御対象を 図 1 に示す。クレーンの制御には、安全性を維持し、高速、正確で過渡時の吊り荷の振動と残留振動を抑制することが必要とされる。本システムは自由度が 3 (滑車の水平方向の位置, 荷を吊るロープの長さ, 吊り荷の振れ角) であるのに対し、アクチュエータの数が 2 つ (横行き用モータ, 巻き上げ用モータ) の劣駆動システムであるため、一度吊り荷が揺れたすと、荷振れが止まりにくく制御が難しい。また、荷振れの固有角周波数がロープ長に対して非線形に依存していることも制御を難しくさせる要因となっている。これまでに、クレーンに対して分散制御系と集中制御系を設計し、それらのロバスト安定性や制御性能を比較することで、分散制御系の有効性が示されている [1, 2]。これを発展させた研究として、ロープ長変動が制御系の安定性や制御性能に影響することに着目し、その影響を緩和、抑制するロバスト制御系設計法が報告されている [3, 4]。また、ロープ長が大きく変動する場合には、固定ゲインのロバストコントローラでは設計結果が保守的になるという問題に、変動パラメータの変動領域の端点でコントローラを補間する手法 [5, 6] や、LFT (線形分数変換) によるスケジューリング手法 [7] をクレーンに適用し GS (ゲインスケジューリング) 制御系設計を設計することで、設計結果の保守性を軽減できるという報告がされている [8]~[10]。その他にも、制御対象のダイナミクスが LPV (線形パラメータ可変) システムで表現される場合に LMI (線形行列不等式) を解くことによるロープ長の変動を考慮した GS (ゲインスケジューリング) 制御系設計法が数多く報告されている [11]~[17]。

本研究では、ジブクレーンの運搬のサイクルタイムを短縮し、作業効率を向上させる手段として、滑車の横行きとロープの巻き上げの 2 動作を同時に行う際の制御系設計法を提案する。本提案法には 2 つの特徴がある。1 つ目は、クレーン作業の高速化に伴い、ロープ長を時変パラメータとして扱った際にロープ長変化の速度や加速度を 0 として取り扱えなくなることに着目し、それらを状態方程式から省略することなく制御系設計を行うことである。これに対して、先行研究ではジブクレーンのモデル導出まではロープ長を時変パラメータとして扱っているが、制御系設計時にはロープ長変化の速度と加速度を 0 として取り扱っている。これにより、本提案法は従来の分散制御手法と比べて制御系設計結果の精度が向上する。しかし、安全性を重視し、ロープ長変化の速度と加速度までを考慮した設計を行うと、ロープ長の変動のみを考慮した場合に比べて設計結果が保守的になる傾向がある。これに対して、GS 制御系設計によって保守性を軽減することが考えられるがジブクレーンの状態方程式は、制御入力行列にスケジューリングパラメータを含んでいるため GS 制御系設計が容易ではない。一方、ジブクレーンのディスクリプタ表現は制御入力行列にスケジューリングパラメータを含まないという特徴を持つ。また、ディスクリプタ変数を導入することで、設計結果の保守性を軽減できる場合があることが報告されている [18]~[22]。本研究の 2 つ目の特徴として、ジブクレーンのディスクリプタ表現に対して適切なディスクリプタ変数を導入し、変動パラメータを LFT を用いて扱いやすい形で取り出すことでポリトピック LPV システムを構成し、ロープ長変化の速度や加速度を考慮した GS 制御系設計を行う手法を示す。また、提案法の有効性をシミュレーションを通して検証する。

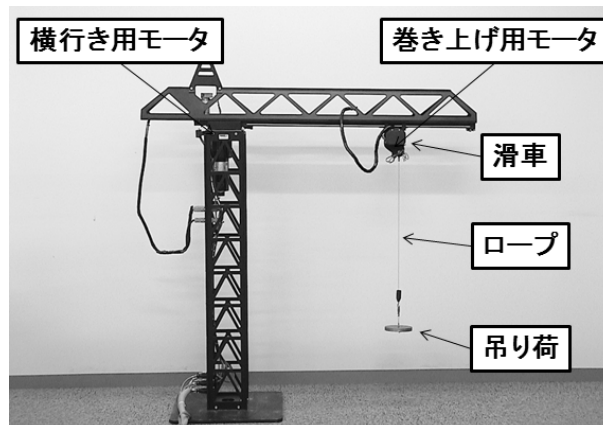


図 1 ジブクレーン

## 2 制御対象

本研究では，ロープ長を時変パラメータとして扱った場合の，滑車の横行きとロープの巻き上げによって引き起こされる吊り荷のダイナミクスを，状態空間表現の枠組みとディスクリプタ表現の枠組みで定式化する．モデリングする際に用いた概略図を図 2 に示す．

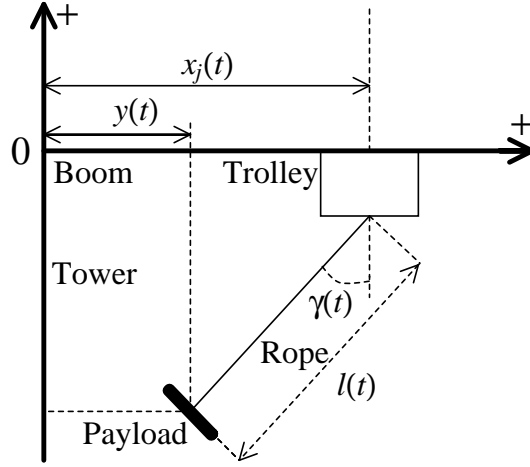


図 2 ジブクレーンの概略図

観測量は，滑車の位置  $x_j$  [m]，吊り荷の振れ角  $\gamma$  [rad]，ロープ長  $l$  [m] であり，制御量は吊り荷の水平方向の位置  $y$  [m] である．ただし， $y = x_j - l \sin \gamma$  と定義する．また，操作量は横行きモータへの入力電流  $I_j$  [A] および巻き上げモータへの入力電流  $I_l$  [A] である．ただし，以下の前提のもとでモデリングを行う．

- i) 滑車と荷を繋ぐロープは質量のない剛体棒である．
- ii) 吊り荷は質点である．
- iii) 吊り荷はタワーとブームで構成される 2 次元空間内のみで運動する．
- iv) 滑車の移動とロープの巻き上げでの摩擦は無視できる．

以上の前提のもとで，一般化座標  $\hat{q}(t)$  を

$$\hat{q}(t) = \begin{bmatrix} x_j(t) \\ \gamma(t) \\ l(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

とすると，ジブクレーンの 3 自由度モデルはラグランジュの運動方程式を用いて式 (2)-(4) と与えられる．ただし， $k_{tj}$  [N·m/A] および  $k_{tl}$  [N·m/A] はトルク定数である．

$$m_j \ddot{x}_j - m_p l \cos \gamma \ddot{\gamma} - m_p \sin \gamma \ddot{l} - 2m_p \cos \gamma \dot{l} \dot{\gamma} + m_p l \sin \gamma \dot{\gamma}^2 = k_{tj} I_j \quad (2)$$

$$-m_p l \cos \gamma \ddot{x}_j + m_p l^2 \ddot{\gamma} + 2m_p l \dot{l} \dot{\gamma} + m_p g l \sin \gamma = 0 \quad (3)$$

$$-m_p \sin \gamma \ddot{x}_j + m_l \ddot{l} - m_p l \dot{\gamma}^2 - m_p g \cos \gamma = k_{tl} I_l \quad (4)$$

式 (2)-(4) から，ロープ長  $l$  とその変化速度  $\dot{l}$  および加速度  $\ddot{l}$  が吊り荷の振れ角  $\gamma$  の周期に影響を及ぼすことがわかる．ただし， $m_p$  [kg] は吊り荷の質量， $m_j$  [kg] と  $m_l$  [kg] は滑車および巻き上げシステムの等価質量， $g$  [m/s<sup>2</sup>] は重力加速度を表している．これ以降は，式 (2),(3) で表される吊り荷振動系と，式 (4) で表される巻き上げ系は別々に制御を行うものとする．本研究では，ロープ長は時間の関数として与えられるものとする．クレーンに対する分散制御の有効性については文献 (7) を参照されたい．ここで，吊り荷振動系に対する一般化座標  $q(t)$  を

$$q(t) = \begin{bmatrix} x_j(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

とおく． $\gamma$  は十分小さいとして， $\sin \gamma \simeq \gamma$ ， $\cos \gamma \simeq 1$ ， $\dot{\gamma}^2 \simeq 0$  のように線形近似を行うと，吊り荷振動系の数学モデルは式 (6) と与えられる．

$$E(l, l^2) \ddot{q} + F(\dot{l}, l) \dot{q} + G(l, \dot{l}) q = H I_j \quad (6)$$

$$E = \begin{bmatrix} m_j & -m_p l \\ -m_p l & m_p l^2 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & -2m_p \dot{l} \\ 0 & 2m_p l \dot{l} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & -m_p \ddot{l} \\ 0 & m_p g l \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} k_{tj} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここで、状態変数を  $x_p = [q^T \ \dot{q}^T]^T$ 、操作量を  $u_p = I_j$  と定義すると、状態空間表現の枠組みにおける状態方程式は式 (8) と与えられる。

$$\dot{x}_p = A_s(l^{-1}, \ddot{l}, \dot{l}^{-1}, \ddot{l}^{-1})x_p + B_s(l^{-1})u_p \quad (8)$$

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -E^{-1}G & -E^{-1}F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m_p(\dot{l}-g)}{m_j-m_p} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_p \dot{l}-m_j g}{(m_j-m_p)l} & 0 & -\frac{2\dot{l}}{l} \end{bmatrix}, B_s = \begin{bmatrix} 0 \\ E^{-1}H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_{tj}}{m_j-m_p} \\ \frac{k_{tj}}{(m_j-m_p)l} \end{bmatrix}$$

これに対し、ディスクリプタ表現の枠組みにおける状態方程式は式 (9) で与えられる。また、出力方程式は式 (10) と与えられる。

$$E_p(l, l^2)\dot{x}_p = A_p(l, \dot{l}, \ddot{l}, l\dot{l})x_p + B_p u_p \quad (9)$$

$$y = C(l)x_p \quad (10)$$

$$E_p = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}, A_p = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -G & -F \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix}, C = [1 \quad -l \quad 0 \quad 0]$$

### 3 制御系設計

本研究では、ロープ長  $l$  の変動に加えて、ロープ長の変化速度  $\dot{l}$  および加速度  $\ddot{l}$  の変動を考慮した状態フィードバックコントローラを設計する。これにより、ロープ長が時間と共に変化する場合の閉ループ系の安定性が理論的に保証される。結果として、安全にロープの巻き上げと滑車の横行きを同時に実行できるため、運搬のサイクルタイムが短縮できる。

まず、3.1 節で状態空間表現の枠組みにおけるロバスト制御系設計法を示す。次に、ディスクリプタ表現の枠組みにおいて適切なディスクリプタ変数と LFT を適用することで、パラメータ依存リアプノフ関数に基づく固定ゲインのロバストコントローラおよびゲインスケジューリングコントローラを設計する手法を示す。ただし、本研究では制御量  $y$  を目標値  $r$  に追従させるために、状態変数に偏差の積分

$$x_e = \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (11)$$

$$e = r - y \quad (12)$$

を追加し、新たな状態変数  $x$  を

$$x(t) = \begin{bmatrix} q(t) - q(\infty) \\ \dot{q}(t) \\ x_e(t) - x_e(\infty) \end{bmatrix} \quad (13)$$

とし、操作量  $u$  を

$$u(t) = u_p(t) - u_p(\infty) \quad (14)$$

と定義したうえで拡大系を構成する。ただし、 $q(\infty)$ 、 $x_e(\infty)$ 、 $u_p(\infty)$  は定常値である。また、信号の  $H_2$  ノルムはその 2 乗面積を表しており、過渡応答のよさを表す尺度に適しているため [23]、制御性能の評価指標には  $H_2$  ノルムを採用する。ただし、以下では  $\text{He}\{M\} = M + M^T$  という記号を用いる。

#### 3.1 状態空間表現の枠組みにおけるロバスト制御系設計

本節では、状態空間表現の枠組みにおけるロープ長変化の速度と加速度を考慮したロバスト制御系設計法を示す。

式 (8) に対する拡大系は式 (15) で与えられる。ここで、先行研究では  $\dot{l} = 0$ 、 $\ddot{l} = 0$  としてモデルを単純化しているが、本研究では単純化をすることなく制御系を設計する。

$$\dot{x} = A(\ddot{l}, \ddot{l}^{-1}, l^{-1}, \dot{l}^{-1}, l)x + B(l^{-1})u \quad (15)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{m_p(\ddot{l}-g)}{m_j-m_p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_p l - m_j g}{(m_j-m_p)l} & 0 & -\frac{2\dot{l}}{l} & 0 \\ -1 & l & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_{tj}}{m_j-m_p} \\ \frac{k_{tj}}{(m_j-m_p)l} \\ 0 \end{bmatrix}$$

式 (15) より, 行列  $A$  は  $\ddot{l}, \dot{l}^{-1}, l^{-1}, \dot{l}^{-1}, l$  を含み, 行列  $B$  は  $l^{-1}$  を含んでいることがわかる. そこで本研究では, 設計に用いる変動パラメータ  $\phi$  の上下界を頂点とするパラメータボックス  $\Phi$  を式 (16) と与える.

$$\Phi = \{\phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4]^T : \phi_i \in \{\phi_i, \overline{\phi_i}\}\} \quad (16)$$

$$\phi_1 = l^{-1}, \phi_2 = l, \phi_3 = \dot{l}, \phi_4 = \ddot{l}$$

式 (15) は  $\phi$  を用いて式 (17) と表現できる.

$$\dot{x} = A(\phi)x_T + B(\phi)u \quad (17)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{m_p(\phi_4-g)}{m_j-m_p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_p\phi_1\phi_4-m_jg\phi_1}{m_j-m_p} & 0 & -2\phi_1\phi_3 & 0 \\ -1 & \phi_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_{tj}}{m_j-m_p} \\ \frac{k_{tj}\phi_2}{m_j-m_p} \\ 0 \end{bmatrix}$$

式 (17) に対して,  $H_2$  制御仕様を考慮した場合の一般化制御対象は式 (18), (19) となる. ただし,  $w$  は外乱入力,  $z$  は評価出力,  $Q$  は拡大系の状態変数  $x$  に対する重み行列,  $R$  は制御入力  $u$  に対する重みである.

$$\dot{x} = A(\phi)x + B_w w + B(\phi)u \quad (18)$$

$$z = Cx + Du \quad (19)$$

$$B_w = I, C = \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

ここで,  $A, B$  は式 (20) のようにポリトープ形式で表現できる.

$$\begin{bmatrix} A(\phi) & B(\phi) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{16} \alpha_i(\phi) \begin{bmatrix} A_i & B_i \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{16} \alpha_i = 1, (i = 1, \dots, 16)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= A(\underline{\phi}_1, \underline{\phi}_2, \underline{\phi}_3, \underline{\phi}_4), A_2 = A(\overline{\phi}_1, \underline{\phi}_2, \underline{\phi}_3, \underline{\phi}_4), A_3 = A(\underline{\phi}_1, \overline{\phi}_2, \underline{\phi}_3, \underline{\phi}_4) \\ A_4 &= A(\overline{\phi}_1, \overline{\phi}_2, \underline{\phi}_3, \underline{\phi}_4), A_5 = A(\underline{\phi}_1, \underline{\phi}_2, \overline{\phi}_3, \underline{\phi}_4), A_6 = A(\overline{\phi}_1, \underline{\phi}_2, \overline{\phi}_3, \underline{\phi}_4) \\ A_7 &= A(\underline{\phi}_1, \overline{\phi}_2, \overline{\phi}_3, \underline{\phi}_4), A_8 = A(\overline{\phi}_1, \overline{\phi}_2, \overline{\phi}_3, \underline{\phi}_4), A_9 = A(\underline{\phi}_1, \underline{\phi}_2, \underline{\phi}_3, \overline{\phi}_4) \\ A_{10} &= A(\overline{\phi}_1, \underline{\phi}_2, \underline{\phi}_3, \overline{\phi}_4), A_{11} = A(\underline{\phi}_1, \overline{\phi}_2, \underline{\phi}_3, \overline{\phi}_4), A_{12} = A(\overline{\phi}_1, \overline{\phi}_2, \underline{\phi}_3, \overline{\phi}_4) \\ A_{13} &= A(\underline{\phi}_1, \underline{\phi}_2, \overline{\phi}_3, \overline{\phi}_4), A_{14} = A(\overline{\phi}_1, \underline{\phi}_2, \overline{\phi}_3, \overline{\phi}_4), A_{15} = A(\underline{\phi}_1, \overline{\phi}_2, \overline{\phi}_3, \overline{\phi}_4) \\ A_{16} &= A(\overline{\phi}_1, \overline{\phi}_2, \overline{\phi}_3, \overline{\phi}_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= B(\underline{\phi}_1), B_2 = B(\overline{\phi}_1), B_3 = B(\underline{\phi}_1), B_4 = B(\overline{\phi}_1), B_5 = B(\underline{\phi}_1), B_6 = B(\overline{\phi}_1) \\ B_7 &= B(\underline{\phi}_1), B_8 = B(\overline{\phi}_1), B_9 = B(\underline{\phi}_1), B_{10} = B(\overline{\phi}_1), B_{11} = B(\underline{\phi}_1), B_{12} = B(\overline{\phi}_1) \\ B_{13} &= B(\underline{\phi}_1), B_{14} = B(\overline{\phi}_1), B_{15} = B(\underline{\phi}_1), B_{16} = B(\overline{\phi}_1) \end{aligned}$$

式 (18)-(20) で表されるシステムを, 変動パラメータ  $\phi$  の変動範囲内において安定化し,  $w$  から  $z$  までの  $H_2$  ノルムを最小化する状態フィードバックコントローラを求めるための LMI 条件は式 (21)-(25) で与えられる. ただし,



行列  $A_G(\theta)$  を  $\Delta$  を用いて  $A_G(\theta) = A_n + B_\delta \Delta (I - D_\delta \Delta)^{-1} C_\delta$  と表すと、式 (28) と等価なシステムは式 (30)-(32) で表現できる。

$$E_G \dot{x}_G = A_n x_G + B_\delta w_\delta + B_G u \quad (30)$$

$$z_\delta = C_\delta x_G + D_\delta w_\delta \quad (31)$$

$$w_\delta = \Delta z_\delta \quad (32)$$

$$A_n = \left[ \begin{array}{c|c} A_{n11} & A_{n12} \\ \hline A_{n21} & A_{n22} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$B_\delta = \left[ \begin{array}{c} B_{\delta 1} \\ B_{\delta 2} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & m_p & 0 & 0 & 0 & 2m_p & m_p \\ -m_p g & 0 & -m_p & -2m_p & m_p & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$C_\delta = \left[ \begin{array}{c|c} C_{\delta 1} & C_{\delta 2} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad D_\delta = \left[ \begin{array}{cccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

最後に、新たなディスクリプタ変数を  $x_d = [x_G^T \ z_\delta^T]^T$  と与えることで、 $x_d$  の係数行列  $A_d$  に  $(I - D_\delta \Delta)^{-1}$  という項を含まない形式に変換する。以上の変換を行うことで、計算可能な LMI 条件を導出することが可能となる。変換後のシステムは式 (33) と与えられる。

$$E_d \dot{x}_d = A_d(\theta) x_d + B_d u \quad (33)$$

$$A_d = A_{d0} + \sum_{i=1}^3 \theta_i A_{di} = \left[ \begin{array}{c|c} A_n & B_\delta \Delta \\ \hline C_\delta & -I + D_\delta \Delta \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} A_{n11} & A_{n12} & B_{\delta 1} \Delta & & & \\ A_{n21} & A_{n22} & B_{\delta 2} \Delta & & & \\ \hline C_{\delta 1} & C_{\delta 2} & -I + D_\delta \Delta & & & \end{array} \right]$$

$$= \left[ \begin{array}{ccccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_j & 0 & 0 & m_p \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_p g \theta_1 & 0 & -m_p \theta_1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

( $i = 1, 2, 3$ )

$$E_d = \left[ \begin{array}{c|c} E_G & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right], B_{du} = \begin{bmatrix} B_G \\ 0 \end{bmatrix}$$

式 (33) の形式で表現されるディスクリプタシステムに対する安定判別条件として次の結果がある [22] . ただし本研究では , リアプノフ行列  $X_d(\theta)$  と変数行列  $Y_d(\theta)$  の候補を次の形に制約する .

$$X_d(\theta) = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ X_{21}(\theta) & X_{22}(\theta) & X_{23}(\theta) \\ X_{31}(\theta) & X_{32}(\theta) & X_{33}(\theta) \end{bmatrix}, X > 0$$

$$Y_d(\theta) = \begin{bmatrix} Y(\theta) & 0 & 0 \end{bmatrix}, Y(\theta) = Y_0 + \theta_1 Y_1$$

[定理] (参考文献 [22])

式 (33) のシステムが安定であるための十分条件は , 式 (35) を満足する

$$X > 0, X_{21}(\theta), X_{22}(\theta), X_{23}(\theta), X_{31}(\theta), X_{32}(\theta), X_{33}(\theta), Y(\theta) \quad (34)$$

が存在することである .

$$\text{He} \left\{ \begin{bmatrix} A_{n11} & A_{n12} & B_{\delta 1} \Delta \\ A_{n21} & A_{n22} & B_{\delta 2} \Delta \\ C_{\delta 1} & C_{\delta 2} & -I + D_{\delta} \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ X_{21}(\theta) & X_{22}(\theta) & X_{23}(\theta) \\ X_{31}(\theta) & X_{32}(\theta) & X_{33}(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(\theta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (35)$$

式 (35) の左右からそれぞれ ,  $[I \ B_{\delta} \Delta (I - D_{\delta} \Delta)^{-1}]$  とその転置をかけると式 (36) を得る .

$$\text{He} \{ A_G(\theta) X + B_G Y(\theta) \} < 0 \quad (36)$$

従って , 式 (35) における  $X$  は , 元のディスクリプタ表現におけるリアプノフ行列ということがわかる . また本研究では ,  $\Delta$  と  $X_{31}(\theta), X_{32}(\theta), X_{33}(\theta)$  との積が存在するが ,  $X_d(\theta)$  を式 (38) の形で与え ,  $X_{31i}, X_{32i}, X_{33i}$  に対して式 (39) の制約を与えることで , 式 (35) を  $\theta$  に対してマルチアフィンとなるようにした . これはスケジューリングパラメータ  $\theta$  の端点で LMI 条件を解くことにより , 安定性を保証できることを意味する .

$$X_d(\theta) = \hat{X}_{d0} + \sum_{i=1}^3 \theta_i \hat{X}_{di} \quad (37)$$

$$\hat{X}_{d0} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ X_{210} & X_{220} & X_{230} \\ X_{310} & X_{320} & X_{330} \end{bmatrix}, \hat{X}_{di} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ X_{21i} & X_{22i} & X_{23i} \\ X_{31i} & X_{32i} & X_{33i} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\Delta_i [X_{31i} \ X_{32i} \ X_{33i}] = 0 \quad (39)$$

以上より , 式 (33) に対して ,  $H_2$  制御仕様を考慮した場合の一般化制御対象を式 (40),(41) と与える .

$$E_d \dot{x}_d = A_d(\theta) x_d + B_{dw} w + B_{du} u \quad (40)$$

$$z = C_d x_d + D u \quad (41)$$

$$B_{dw} = \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C_d = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

ただし ,  $w$  は外乱入力 ,  $z$  は評価出力 ,  $Q$  は拡大系の状態変数  $x$  に対する重み行列 ,  $R$  は制御入力  $u$  に対する重みである . ここで , 行列  $A_d, X_d, Y_d$  は式 (42) のようにポリトープで表現できる .

$$\begin{bmatrix} A_d(\theta) & X_d(\theta) & Y_d(\theta) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \beta_i(\theta) \begin{bmatrix} A_{di} & X_{di} & Y_{di} \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\beta_i \geq 0, \sum_{i=1}^8 \beta_i = 1, (i = 1, \dots, 8)$$

$$A_{d1} = A_d(\underline{\theta}_1, \underline{\theta}_2, \underline{\theta}_3), A_{d2} = A_d(\overline{\theta}_1, \underline{\theta}_2, \underline{\theta}_3), A_{d3} = A_d(\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_2, \underline{\theta}_3), A_{d4} = A_d(\overline{\theta}_1, \overline{\theta}_2, \underline{\theta}_3)$$

$$A_{d5} = A_d(\underline{\theta}_1, \underline{\theta}_2, \overline{\theta}_3), A_{d6} = A_d(\overline{\theta}_1, \underline{\theta}_2, \overline{\theta}_3), A_{d7} = A_d(\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_2, \overline{\theta}_3), A_{d8} = A_d(\overline{\theta}_1, \overline{\theta}_2, \overline{\theta}_3)$$

$$X_{d1} = X_d(\underline{\theta}_1, \underline{\theta}_2, \underline{\theta}_3), X_{d2} = X_d(\overline{\theta}_1, \underline{\theta}_2, \underline{\theta}_3), X_{d3} = X_d(\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_2, \underline{\theta}_3), X_{d4} = X_d(\overline{\theta}_1, \overline{\theta}_2, \underline{\theta}_3)$$

$$X_{d5} = X_d(\underline{\theta}_1, \underline{\theta}_2, \overline{\theta}_3), X_{d6} = X_d(\overline{\theta}_1, \underline{\theta}_2, \overline{\theta}_3), X_{d7} = X_d(\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_2, \overline{\theta}_3), X_{d8} = X_d(\overline{\theta}_1, \overline{\theta}_2, \overline{\theta}_3)$$

$$Y_{d1} = Y_d(\underline{\theta}_1), Y_{d2} = Y_d(\overline{\theta}_1), Y_{d3} = Y_d(\underline{\theta}_1), Y_{d4} = Y_d(\overline{\theta}_1)$$

$$Y_{d5} = Y_d(\underline{\theta}_1), Y_{d6} = Y_d(\overline{\theta}_1), Y_{d7} = Y_d(\underline{\theta}_1), Y_{d8} = Y_d(\overline{\theta}_1)$$

式 (40)-(42) で表されるポリトピック LPV システムを, スケジューリングパラメータ  $\theta$  の変動範囲内において安定化し,  $w$  から  $z$  までの  $H_2$  ノルムを最小化する状態フィードバック GS コントローラを求めるための LMI 条件は式 (43)-(48) で与えられる.

$$\text{minimize} : \gamma \quad (43)$$

$$\text{subject to} : X > 0 \quad (44)$$

$$\begin{bmatrix} \text{He} \{A_{di}X_{di} + B_{du}Y_{di}\} & B_{dw} \\ B_{dw}^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (45)$$

$$\begin{bmatrix} X & (CX + DY_i)^T \\ CX + DY_i & W_i \end{bmatrix} > 0 \quad (46)$$

$$\text{Trace}(W_i) < \gamma^2 \quad (47)$$

$$(i = 1, \dots, 8)$$

ただし, 変数行列  $W(\theta)$  を次のように定義する.

$$W(\theta) = W_0 + \theta_1 W_1 = \sum_{i=1}^8 \beta_i(\theta) W_i, \beta_i \geq 0, \sum_{i=1}^8 \beta_i = 1, (i = 1, \dots, 8) \quad (48)$$

$$W_1 = W(\underline{\theta}_1), W_2 = W(\overline{\theta}_1), W_3 = W(\underline{\theta}_1), W_4 = W(\overline{\theta}_1)$$

$$W_5 = W(\underline{\theta}_1), W_6 = W(\overline{\theta}_1), W_7 = W(\underline{\theta}_1), W_8 = W(\overline{\theta}_1)$$

式 (43)-(47) を満たす  $X, Y_i$  から, ディスクリプタ表現の枠組みにおける GS コントローラ  $K_d$  は式 (49) のように与えられる.

$$K_d = \sum_{i=1}^2 \lambda_i(\theta_1) K_{di}, K_{di} = Y_i X^{-1}, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^2 \lambda_i = 1, (i = 1, 2) \quad (49)$$

#### 4 設計結果

設計結果を以下に示す. ただし, ロープの巻き上げに関するパラメータの上下界は  $l \in [0.1, 0.7], i \in [-0.25, 0.25], \ddot{i} \in [-0.25, 0.25]$  とする. 3.1 節で設計したロバストコントローラによる閉ループ系の  $H_2$  ノルムの上界が 5.32 であるのに対して, 3.2 節で設計した GS コントローラによる閉ループ系の  $H_2$  ノルムの上界は 5.26 であった. このことから, ジブクレーンに対してディスクリプタ表現を用いた GS 制御系設計を行うことによって, 設計結果の保守性が軽減できていることがわかる.

本研究で設計したコントローラの有効性を検証するためにシミュレーションを行った. 目標値は吊り荷の位置  $y$  に対して 0.5 [m] と与えた. またロープ長の時間変化に対してロバスト安定性を保証できていることを示すために, ロープ長を時間と共に図 3, 図 5, 図 7 のように変化させた. それぞれの場合において, 吊り荷の水平方向の位置決めを行った結果を図 4, 図 6, 図 8 に示す.



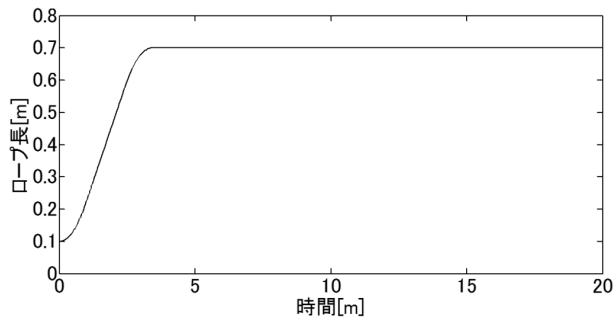


図 3 巻き下げ時のロープ長

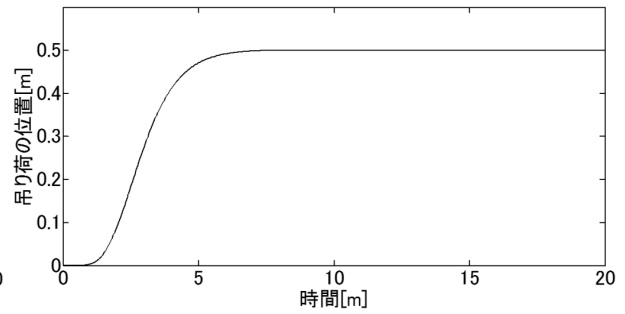


図 4 巻き下げながらのシミュレーション結果

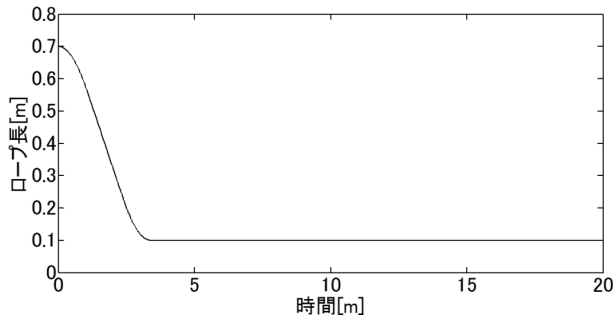


図 5 巻き上げ時のロープ長

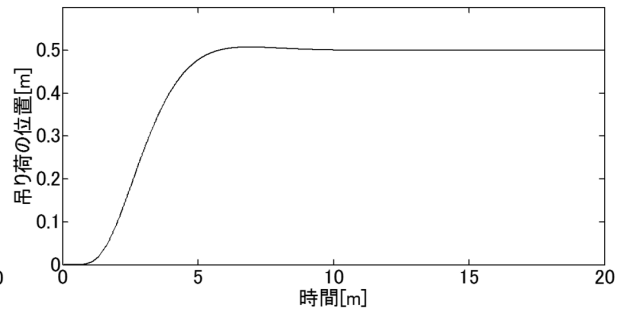


図 6 巻き上げながらのシミュレーション結果

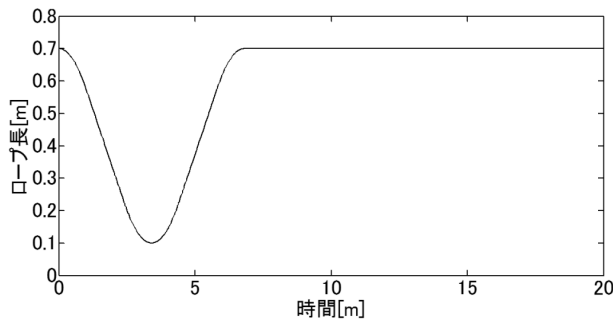


図 7 巻き上げ後巻き下げた時のロープ長

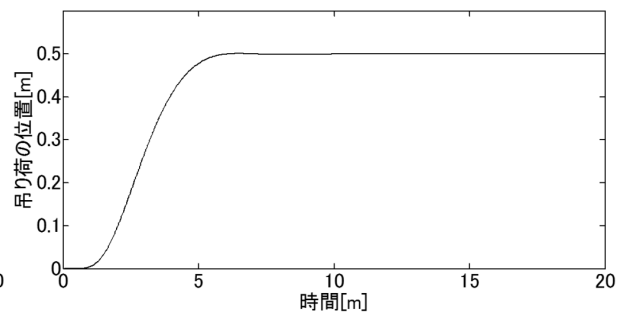


図 8 巻き上げ後巻き下げた時のシミュレーション結果

シミュレーション結果から、本研究で設計した GS コントローラを用いることでロープ長が時変の場合でも系を安定化できていることがわかる。また、定常偏差なく目標値に追従していることがわかる。

## 5 おわりに

本研究では、ディスクリプタ表現の枠組みにおいて、ジブクレーンに対するロープ長の時間変化を考慮した GS 制御系設計を行った。その結果、状態空間表現の枠組みにおいてロバストコントローラを設計した場合に比べて保守性が軽減できることを、 $H_2$  ノルムの比較を行うことにより示した。最後に、提案法の有効性をシミュレーションを通して検証した。今後の課題として、実験を通して提案法の有効性を検証することが挙げられる。

## 謝辞

本研究は 2011 年度南山大学パツへ研究奨励金 I-A-2 の助成を受けた。

## 参考文献

- [1] 高木, 西村: タワークレーンの起伏・旋回の分散制御, 日本機械学会論文集 (C 編), 65-640, 4692/4699 (1999)
- [2] 高木, 西村: タワークレーンの制御: 分散制御系と集中制御系の比較, 「振動と運動の制御」シンポジウム講演論文集, 7/10 (2001)
- [3] 高木, 内山: 旋回クレーンの簡易ロバスト制御, 日本機械学会論文集 (C 編), 70-690, 483/491 (2004)
- [4] S. Sano, H. Ouyang, H. Yamashita and N. Uchiyama: LMI Approach to Robust Control of Rotary Cranes under Load Sway Frequency Variance, Journal of System Design and Dynamics, 5-7, 1402/1417 (2011)

- [5] P. Apkarian and J. M. Biannic and P. Gahinet : Self-Scheduled  $H_\infty$  Control of Missile via Linear Matrix Inequalities, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **18**-3, 532/538 (1995)
- [6] P. Apkarian, P. Gahinet and G. Becker : Self-scheduled  $H_\infty$  control of linear parameter-varying systems: a design example , *Automatica* , **31**-9 , 1251/1261 (1995)
- [7] A. Packard : Gain scheduling via linear fractional transformations , *Systems Control Letters*, **22**-2, 79/92 (1994)
- [8] 西村, 種村, 野波 : 走行クレーンのロープ長変動に対するゲインスケジューリング位置決め制御, *日本機械学会論文集 (C 編)*, **62**-599, 176/182 (1996)
- [9] 高木, 西村 : タワークレーンの吊り荷ロープ長変動を考慮したゲインスケジューリング制御, *日本機械学会論文集 (C 編)*, **64**-626, 3805/3812 (1998)
- [10] 高木, 西村 : タワークレーンの吊り荷ロープ長変動に対する起伏・旋回方向のゲインスケジューリング分散制御, *日本機械学会論文集 (C 編)*, **69**-680, 914/922 (2003)
- [11] D . J . Leith , W . E . Leithead : Survey of gain-scheduling analysis and design , *International Journal of Control* , **73**-11 , 1001/1025 (2000)
- [12] W . J . Rugh , J . S . Shamma : Research on gain scheduling , *Automatica* , **36**-10 , 1401/1425 (2000)
- [13] P. Apkarian and R.J. Adams: Advanced Gain-Scheduling Techniques for Uncertain Systems, *IEEE transactions on control systems technology*, **6**-1, 21/32 (1998)
- [14] P . Gahinet, P . Apkarian and M . Chilali: Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty, *IEEE Trans. Automatic Control* , **46**-12 , 1941/1946 (2001)
- [15] R. Watanabe, K. Uchida and M. Fujita : A new LMI approach to analysis of linear systems with scheduling parameter based on finite number of LMI conditions , *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, 1663-1665 (1996)
- [16] 青木, 高見, 大石 : 2 乗和多項式に基づくクレーンのゲインスケジューリング制御, *計測自動制御学会論文集*, **45**-4 , 208/214 (2009)
- [17] 安江, 高見 : 摩擦と特性変動を補償したクレーンの制御, *日本機械学会東海支部第 59 期総会講演論文集*, **103**-1 , 13/14 (2010)
- [18] 増淵, 示村 : ゲインスケジューリング系の設計におけるディスクリプタ形式の利用について, *システム制御情報学会誌*, **12**-7 , 390/394 (1999)
- [19] E. Fridman, U. Shaked : A descriptor system approach to  $H_\infty$  control of linear time-delay systems, *IEEE Trans. AC*, **47**-2, 253/270 (2002)
- [20] 陳, 杉江 : パラメータ依存リアプノフ関数に基づくディスクリプタシステムのゲインスケジューリング, *計測自動制御学会論文集*, **34**-9 , 1159-1163 (1998)
- [21] G. Chen, T. Sugie, T. Fujinaka and H. Shibata : Mixed- $\mu$  analysis for dynamical systems using descriptor form, *1999 American Control Conference*, 1314/1318 (1999)
- [22] 陳, 柴田 : ディスクリプタ表現の冗長性を利用したシステム解析, *システム/制御/情報 : システム制御情報学会誌*, **47**-5, 211-216 (2003)
- [23] 劉 : 線形ロバスト制御, *コロナ社*, 134/154 (2002)