

タグチメソッドのSN比に対する信頼区間の性質に関する考察

藤村 良介* 松田 眞一†

E-Mail: matsu@nanzan-u.ac.jp

本論文ではタグチメソッドでのSN比の信頼区間に関してモンテカルロシミュレーションを行い、その性質を考察する。その結果、静特性に関しては信頼区間の方が短くなるのが1〜3割程度はあると分かり、再現性の確認において実用上でも注意を要するという結論を得た。一方、動特性では信頼区間の方が6dbより常に長くなることが分かり、再現性の確認が厳しすぎる可能性があることが分かった。

1 はじめに

近年製造業においてタグチメソッドは大きな役割を果たしており、その数理的側面を研究することは重要なことであると思われる。そのタグチメソッドにおいて大きなウエイトを占めるSN比に関しては特に重要であると言える。

過去の研究として、永田 [5] はタグチメソッドにおけるSN比の分布が2重非心 F 分布で説明可能であるという結果を導出し、堀井・松田 [1] はその分布の計算において既存の近似法がうまく機能せずモンテカルロ法が妥当であるという結論を得たが、前廣・高橋・松田 [4] は他の近似法について研究を行い、近似法のうちMCL-M法が有効であると結論づけている。さらに、前廣・高橋・松田 [4] はSN比の信頼区間の計算を示し、その結果田口の経験則によるSN比の再現性 $\pm 3\text{db}$ は幅に関しては概ね問題はないが、対称性がないために $\pm 3\text{db}$ が緩い基準となる場合があることをいくつかの実データで示した。

本論文では、SN比の信頼区間に関して一般的といえる結論は示せていないのでモンテカルロシミュレーションによりその性質の考察を行う。

2 タグチメソッドについて

タグチメソッド（国内では品質工学と呼ばれる）とは、実験計画法から発展した技術で、田口玄一氏が1950年代から構築してきた手法と考え方の体系である。実験計画法は調べたい因子の効果を少ない実験で評価するための統計的な実験手法であり、平均値の変化の解析を行うことである。タグチメソッドは実験計画法を基に、ばらつきや劣化を減らし、品質問題を未然に防止するための技術である。

SN比とは、田口氏が導入した入力と出力の関係におけるノイズに対する強さを表す尺度であり、この値が大きいほどバラつきは小さくなり、安定しているといえる。また初めにSN比の高い条件を選び、次に感度を目標値に設定することを二段階設計と言う。(立林 [6], 立林 [7] 参照)

* 南山大学大学院数理情報研究科数理情報専攻

† 南山大学情報理工学部情報システム数理学科

2.1 SN 比の再現性

一般には、SN 比の再現性は、推定値と確認実験での値の差が $\pm 3\text{db}$ の間に入っていれば再現していると判断している。 $\pm 3\text{db}$ とは、 $10\log_{10}$ をとっているので、約 $\frac{1}{2} \sim 2$ 倍の間に入っていることを意味している。(立林 [6] 参照)

3 静特性の SN 比

静特性とは出力の目標値が変化しない場合のシステムのことである。

3.1 静特性の SN 比の求め方と統計的分布

a 水準の制御因子 A , r 水準の誤差因子 N のときの m 回繰り返し実験で得られた表 1 のようなデータを考える。

表 1: 静特性の実験データ

水準	繰り返し	$N_1, \dots, N_j, \dots, N_r$	平均	不偏分散	SN 比
A_1	1	$x_{111}, \dots, x_{1j1}, \dots, x_{1r1}$	$\bar{x}_{A_1}$	V_{A_1}	γ_{A_1}
	$\vdots$	$\vdots$			
	k	$x_{11k}, \dots, x_{1jk}, \dots, x_{1rk}$			
	$\vdots$	$\vdots$			
	m	$x_{11m}, \dots, x_{1jm}, \dots, x_{1rm}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_i	1	$x_{i11}, \dots, x_{ij1}, \dots, x_{ir1}$	$\bar{x}_{A_i}$	V_{A_i}	γ_{A_i}
	$\vdots$	$\vdots$			
	k	$x_{i1k}, \dots, x_{ijk}, \dots, x_{irk}$			
	$\vdots$	$\vdots$			
	m	$x_{i1m}, \dots, x_{ijm}, \dots, x_{irm}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_a	1	$x_{a11}, \dots, x_{aj1}, \dots, x_{ar1}$	$\bar{x}_{A_a}$	V_{A_a}	γ_{A_a}
	$\vdots$	$\vdots$			
	k	$x_{a1k}, \dots, x_{ajk}, \dots, x_{ark}$			
	$\vdots$	$\vdots$			
	m	$x_{a1m}, \dots, x_{ajm}, \dots, x_{arm}$			

このとき、標本 SN 比は、

$$\gamma_{A_i} = 10\log_{10} \left(\frac{\bar{x}_{A_i}^2}{V_{A_i}} \right) \quad (1)$$

となる。ここで得られたデータ x_{ijk} は以下のように分解できると考える。

$$x_{ijk} = \mu'_i + n_{ij} + \epsilon_{ijk} = \mu + a_i + n_{ij} + \epsilon_{ijk} \quad (2)$$

ここで、誤差因子以外の誤差 ϵ_{ijk} は互いに独立に $E(\epsilon_{ijk}) = 0$, $V(\epsilon_{ijk}) = \sigma_i^2$ を満たしている。また、 $\sum_{i=1}^a a_i = 0$, $\sum_{j=1}^r n_{ij} = 0$ が成り立つとする。よって母 SN 比は、

$$10 \log_{10} \frac{(\mu + a_i)^2}{\sum_{j=1}^r \frac{mn_{ij}^2}{(rm-1)} + \sigma_i^2} \quad (3)$$

となる。次に、誤差 ϵ_{ijk} に正規性を仮定して確率分布を求めと、

$$\frac{rm\bar{x}_{Ai}^2}{V_{Ai}} \sim F''(1, rm-1; \delta_1, \delta_2) \quad (4)$$

$$\delta_1 = \frac{rm(\mu + a_i)^2}{\sigma_i^2}, \delta_2 = \frac{m \sum n_{ij}^2}{\sigma_i^2}$$

となる。これより静特性 (望目特性) の SN 比は上記で表される 2 重非心 F 分布と関連付けられる。(堀井・松田 [1], 永田 [5] 参照)

4 動特性の SN 比

動特性とは出力が入力につれて動くシステムのことである。

4.0.1 動特性の SN 比の求め方と統計的分布

入力の信号因子を m 水準の X とし、 a 水準の制御因子 A 、 r 水準の誤差因子 N のときの実験で得られたデータを y_{ijk} ($i = 1, \dots, a, j = 1, \dots, r, k = 1, \dots, m$) とする。

このとき標本 SN 比は、

$$\gamma_{Ai} = 10 \log_{10} \left(\frac{\hat{\beta}_{Ai}^2}{V_{eAi}} \right) \quad (5)$$

となる。次に y_{ijk} のデータに対し、各 A_i で入力信号 X_k に対する全体の傾きと、 A_i を誤差因子 N_j で場合分けしたときの傾きと誤差 ϵ_{ijk} で以下のようなモデルが成り立つと考える。

$$y_{ijk} = \beta_{Ai} X_k + (\beta_{AiN_j} - \beta_{Ai}) X_k + \epsilon_{ijk} \quad (6)$$

ここで、誤差因子以外の誤差 ϵ_{ijk} は互いに独立で $E(\epsilon_{ijk}) = 0$, $V(\epsilon_{ijk}) = \sigma_i^2$ を満たす。

よって母 SN 比は、

$$10 \log_{10} \frac{\beta_{Ai}^2}{\frac{\sum_j (\beta_{AiN_j} - \beta_{Ai})^2 \sum_k X_k^2}{rm-1} + \sigma_i^2} \quad (7)$$

となる。ここで、誤差 ϵ_{ijk} に正規性を持たせ、静特性と同様に式変形をすると以下の分布に従うことがわかる。

$$\frac{(r \sum_k X_k^2) \hat{\beta}_{A_i}^2}{V_{eA_i}} \sim F''(1, rm - 1, \lambda_1, \lambda_2) \quad (8)$$

$$\lambda_1 = \frac{(r \sum_k X_k^2) \beta_{A_i}^2}{\sigma_i^2}, \lambda_2 = \frac{\sum_j (\beta_{A_i N_j} - \beta_{A_i})^2}{\sigma_i^2}$$

従って、動特性の SN 比も 2 重非心 F 分布と関連付けられる。(堀井・松田 [1], 永田 [5] 参照)

5 2 重非心 F 分布

2 重非心 F 分布 $F''(v_1, v_2, \lambda_1, \lambda_2)$ は複雑な密度関数をもつために直接的な分布計算は困難である。本研究では前廣・高橋・松田 [4] の作成した MCL-M 法の R 関数を近似として利用した。

5.1 MCL-M 法

Tiku[8] が求めた 2 重非心 F 分布の r 番目のモーメント μ'_r の近似法を利用し, Mudholkar et al.[3] が導出した非心 F 変数に基づくモーメント近似を用いた近似法である。前廣・高橋・松田 [4] によって MCL-M 法と名付けられた。

6 シミュレーションのプログラム

前廣・高橋・松田 [4] で使用されているデータをベースにプログラムの作成を行った。

6.1 seism, dousn 関数

これらの関数は、SN 比の信頼区間を求め、list 形式で出力するプログラムである。(前廣・高橋・松田 [4] 参照)

6.2 seirdata, dourdata 関数

静特性の場合、seism 関数結果、 A の水準数、 N の水準数、繰り返し回数 m を引数に、分解で生じる ϵ_{ijk} の項を乱数に置き換えて x_{ijk} の値を作成する関数である。R における 1 つのデータの計算式は

$$\bullet \text{ ave} + a[i] + n[i,j] + \text{rnorm}(1, 0, \text{sqrt}(\text{va}[i]))$$

となる。ここで、ave, $a[i]$, $n[i,j]$ はそれぞれ μ , a_i , n_{ij} の推定値を表す。また、 $\text{va}[i]$ は A_i に対する誤差 ϵ_{ijk} の分散の推定値である。

動特性の場合の R における 1 つのデータの計算式は

$$\bullet \text{ kata}[i,j] * \text{sigdata}[k] + \text{rnorm}(1, 0, \text{sqrt}(\text{va2}[i]))$$

となる。ここで、kata[i,j] は $\beta_{A_i N_j}$ の推定値を表し、sigdata[k] は X_k を表す。また、va2[i] は A_i に対する誤差 ϵ_{ijk} の分散の推定値である。

6.3 seisimu, dousimu 関数

1000 回分のデータ生成によるモンテカルロシミュレーションにより、信頼区間の結果を返す関数である。

6.4 summary 関数

静特性と動特性ともに、上限 SN 比 (個)、下限 SN 比 (個)、SN 比 (個)、上限 SN 比、下限 SN 比、SN 比、上幅 (回)、下幅 (回)、幅 (回) の出力を行う。上限 SN 比 (個)、下限 SN 比 (個)、SN 比 (個) はそれぞれ 1000 回中で計算が可能であったデータ数を示し、上限 SN 比、下限 SN 比、SN 比はそれぞれの平均値を示し、上幅 (回)、下幅 (回)、幅 (回) はそれぞれ 3db, 3db, 6db を切った回数を示す。

近似がよいとされた MCL-M 法を用いても 1000 回のシミュレーション中で計算ができないデータがあったため計算が可能であった回数を示す必要が生じた。

7 静特性のシミュレーション

あるサーキットでの RC カーレースにおける 1 周のタイムをシミュレーション (かわにし [2] 参照) により堀井・松田 [1] が採取したデータである。このデータを元にモンテカルロシミュレーションをかけた結果の summary 関数の出力のまとめが表 2,3 であり、そのうち SN 比の値が一番良かった水準 1 のヒストグラムの結果が図 1,2,3 である。

表 2: RC カー (静) の結果 1

水準	上側 SN 比 (個)	下側 SN 比 (個)	SN 比 (個)	上側 SN 比	下側 SN 比	SN 比
A1	882	990	1000	46.55	38.97	42.11
A2	992	1000	1000	38.53	30.33	33.46
A3	998	1000	1000	35.90	27.12	30.39

表 3: RC カー (静) の結果 2

水準	上幅 (回)	下幅 (回)	幅 (回)
A1	117	376	189
A2	147	365	192
A3	105	297	155

SN 比の信頼区間の平均の幅は 3 つの水準で最大 8.78db, 最小 7.58db となった。しかし、1000 回の内容を見ると幅に関して、約 2 割が 6db を切る結果になった。また、ヒストグラ

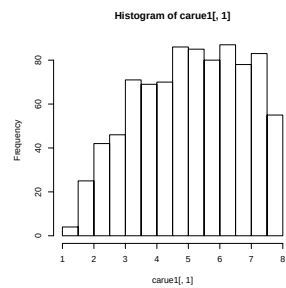


図 1: RC カー (静) の水準 1 についての上幅の分布

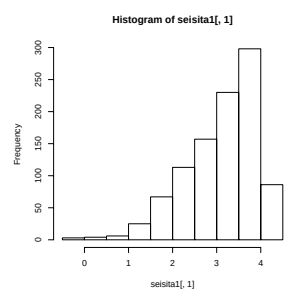


図 2: RC カー (静) の水準 1 についての下幅の分布

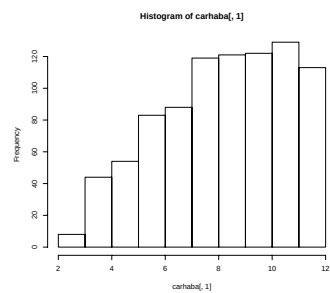


図 3: RC カー (静) の水準 1 についての幅の分布

ムに表してみると最大 SN 比となった水準 1 で 1db~12db という分布になった。SN 比の再現性 $\pm 3\text{db}$ と比較してみると、 $\pm 3\text{db}$ のように対称ではなく、シミュレーション結果より下幅のほうが $\pm 3\text{db}$ を切る割合が多いことが分かった。またこのシミュレーション結果の 3 水準とも下側寄りになっている。水準 1 の上幅、下幅の分布についてヒストグラムで表してみると、上幅については 1db~8db、下幅については $-0.5\text{db} \sim 4.5\text{db}$ となり、上幅の方が幅が広い結果になった。(下限がマイナスになるのはとても歪んだ分布になっている場合があるせいである。上下で等確率の信頼区間がよいのかというという証左でもある。)

8 動特性のシミュレーション

あるサーキットでの RC カーレースにおける 1 周のタイムをシミュレーション (かわにし [2] 参照) により前廣・高橋・松田 [4] が採取したデータである。このデータを元にモンテカルロシミュレーションをかけた結果の summary 関数の出力のまとめが表 4,5 であり、そのうち SN 比の値が一番良かった水準 2 のヒストグラムの結果が図 4,5,6 である。

表 4: RC カー (動) の結果 1

水準	上側 SN 比 (個)	下側 SN 比 (個)	SN 比 (個)	上側 SN 比	下側 SN 比	SN 比
A1	1000	1000	1000	10.97	2.70	6.33
A2	1000	1000	1000	11.48	3.28	6.86
A3	1000	1000	1000	11.31	3.08	6.67

表 5: RC カー (動) の結果 2

水準	上幅 (回)	下幅 (回)	幅 (回)
A1	0	0	0
A2	0	0	0
A3	0	0	0

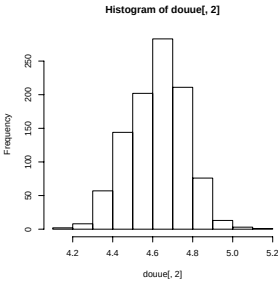


図 4: RC カー (動) の水準 2 についての上幅の分布

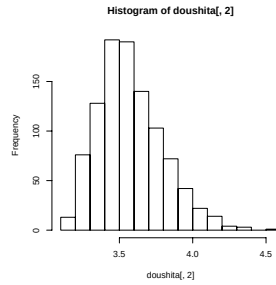


図 5: RC カー (動) の水準 2 についての下幅の分布

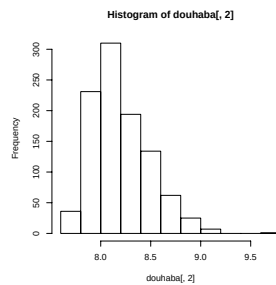


図 6: RC カー (動) の水準 2 についての幅の分布

SN 比の信頼区間の平均の幅は 3 つの水準で幅は最大 8.27db, 最小 8.20db となった。一方, 1000 回の内容を見てみるとすべての幅が 6db 以上となった。幅の分布は最大の SN 比となった水準 2 で 7.7db~9.7db となった。SN 比の再現性の ± 3 db と比較してみると, ± 3 db のように対称ではなく, 3 水準とも下側寄りになる結果になった。しかし, 上幅, 下幅とともに ± 3 db を切ったものはなかった。水準 2 の上幅, 下幅についてのヒストグラムを表してみると, 上幅については 4.2db~5.1db, 下幅については 3.1db~4.5db という幅になり, 下幅の方が幅広い結果になった。

9 まとめ

タグチメソッドにおける SN 比の信頼区間について, 静特性で 5 パターン, 動特性で 2 パターンの実データを元に誤差因子以外の誤差に正規乱数を与えることで 1000 回分のシミュレーションデータを作成し, 分析結果を得ると共に, 田口玄一氏の経験則による SN 比の再現性 ± 3 db との関係について調べた。その結果, 1000 回の平均については, ± 3 db の幅 6db に対して, 静特性と動特性共に各シミュレーションの 1 番 SN 比の値が良い物だけを見ると全ての幅において 6db より長くなる結果になった。また ± 3 db のように対称になることはなく, こちらも各シミュレーションの 1 番 SN 比の値が良い物だけを見るとすべて下側寄りになる結果になった。さらに, 1000 回の内容については, 上幅, 下幅が 3db を切る割合について調べた。静特性では全てのシミュレーション結果において下側に ± 3 db を切っ

たものが上回った。またヒストグラムに表してみると上幅は幅が広く、下幅は幅が狭い結果になった。以上より静特性では上側 SN 比と下側 SN 比の差が 6db を切る割合を調べてみると約 1~3 割切る結果になった。一方、動特性では $\pm 3\text{db}$ を切るものはなかった。すなわち、信頼区間の幅が 6db を切るものはなかった。同様にヒストグラムに表してみると上幅は幅が狭く、下幅は幅が広い結果になった。この解析からタグチメソッドの現場での実用方法としては、静特性では考慮の余地があり、動特性に関しては $\pm 3\text{db}$ の値は緩い基準ではないため変更する必要はないと思われる。しかし、場合によっては $\pm 3\text{db}$ は厳しい基準となるであろう。

また、今回のシミュレーションでは上下対称ではなかったので静特性に関して対称となるように有意水準 5 % を振り分けて信頼区間を導出した場合、ほぼ対称に得られたシミュレーション結果では信頼区間の幅が若干長くなる実験結果を得た。このことから現在の SN 比の再現性 $\pm 3\text{db}$ の基準ではきつことが明らかになった。また、非対称性が強くて凄く極端な値を設定しても全く対称に近づかない場合は信頼区間の幅が短くなる結論に至った。最後に上幅、下幅、幅について述べておくと、幅の値の $\pm 3\text{db}$ を切る割合が有意水準 5 % を振り分ける前と比べて減少し、幅の値が改善されていることにより全体も改善されている結果になった。しかし、動特性と比べて $\pm 3\text{db}$ を切らないというわけではないので、信頼区間を使うべきという結論に至った。

10 おわりに

今回、SN 比における $\pm 3\text{db}$ の幅 6db における妥当性や対称性に関してシミュレーションを行ってわかった事は、静特性と動特性は一律の基準ではないことである。このことから、現場においては静特性と動特性の再現性を同レベルで行なっていると思われるが、そのことに関して再考の余地があると言える。

今後の課題としては MCL-M 法で計算ができなかった場合があるためその改良と制御因子を 2 つ以上にするモデルの拡張が挙げられる。

参考文献

- [1] 堀井 里佳子・松田 眞一 (2010): 2 重非心 F 分布のパーセント点近似法の評価と SN 比への応用, 南山大学紀要『アカデミア』情報理工学編, **10**, 27-37.
- [2] かわにし (2004): お気楽 RC!, <http://homepage3.nifty.com/kawanish/>.
- [3] Mudholkar,G.S., Chaubey,Y.P. and Lin,C. (1976): Approximations for the doubly noncentral F-distribution, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **5**, 49-63.
- [4] 前廣 芳孝・高橋 知也・松田 眞一 (2011): 2 重非心 F 分布のパーセント点近似法を用いたタグチメソッドの SN 比の信頼区間, 南山大学紀要『アカデミア』情報理工学編, **11**, 55-75.
- [5] 永田 靖 (2006): 統計的手法における SN 比, 第 1 回横幹連合総合シンポジウム.

- [6] 立林 和夫 (2004) : 『入門タグチメソッド』 , 日科技連.
- [7] 立林 和夫 (2009) : 『タグチメソッド入門』 , 日本経済新聞出版社.
- [8] Tiku, M.L. (1972): A note on the distribution of the doubly non-central F-distribution, *Austral. J. Statist.*, **14**, 37-40.